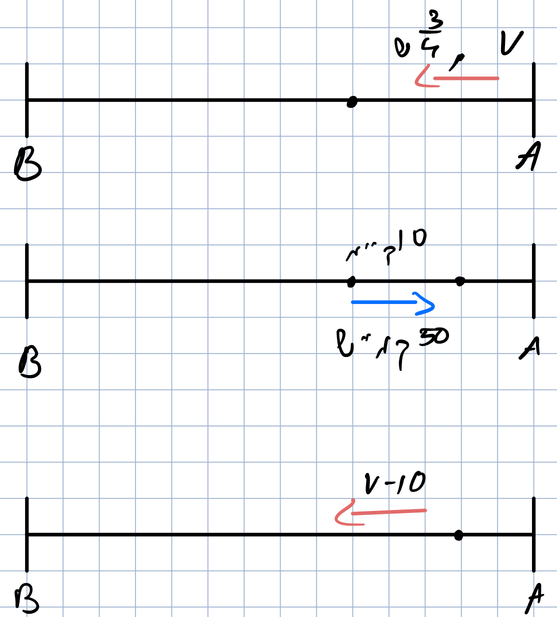
.1 נהג יצא מעיר A לכיוון עיר B. המרחק בין שתי הערים הוא 120 ק״מ.
בהתחלה נסע הנהג במהירות קבועה כפי שתכנן, אבל כעבור $\frac{3}{4}$ שעה מתחילת נסיעתו הייתה תקלה ברכבו.
הנהג חזר מיד לכיוון A, ונסע 10 ק״מ במהירות של 50 קמ״ש עד למוסך הנמצא בדרך ל- A.
המוסך טיפל בתקלה במשך 33 דקות, ומיד לאחר הטיפול יצא הנהג לכיוון B במהירות הקטנה ב- 10 קמ״ש ממהירות נסיעתו עד התקלה.
הוא הגיע ל- B באיחור של שעה אחת לעומת השעה המתוכננת.
מה הייתה מהירות הנסיעה של הנהג עד התקלה?



- עד התקלה
- מהתקלה עד המוסך
- 33 ד' הפסקה
- מהמוסך ל- B

נגדיר:

מהירות הנהג לפני התקלה - v

	ז	מ	ד
נסיעה רגילה	$\frac{120}{v}$	v	120
עד התקלה	$\frac{3}{4}$	v	$\frac{3v}{4}$
מהתקלה עד המוסך	$\frac{1}{5}$	50	10
טיפול במוסך	$\frac{11}{20}$	0	0
מהמוסך ל- B	$\frac{130-\frac{3v}{4}}{v-10}$	$v-10$	$130-\frac{3v}{4}$

$$120-\left(\frac{3}{4}v-10\right)$$

כעת נבנה משוואה בין הזמנים.

$$\frac{120}{v}+1=\frac{3}{4}+\frac{1}{5}+\frac{11}{20}+\frac{130-\frac{3v}{4}}{v-10}$$

$$\frac{120+v}{v}=\frac{3}{2}+\frac{520-3v}{4(v-10)} \quad / \cdot 4(v-10),\ \cdot v$$

$$4(v-10)(120+v)=6v(v-10)+v(520-3v)$$

$$480v+4v^2-4800-40v=6v^2-60v+520v-3v^2$$

$$v^2-20v-4800=0$$

$\boxed{v=80}$, $v=\cancel{-60}$

$v>0$

מהירות הנהג עד התקלה הייתה 80 קמ"ש

2. נתונה סדרה a_n : $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

ונתונה סדרת הסכומים S_n : $S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

S_n הוא סכום n האיברים הראשונים בסדרה a_n.

סדרת הסכומים S_n מקיימת לכל n טבעי: $S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$, $S_1 = 3$, $b \neq 0$.

א. הוכח כי הסדרה a_n היא סדרה הנדסית שהמנה שלה היא b.

ב. נתון כי $|b| < 1$.

בונים מהסדרה a_n שתי סדרות הנדסיות, I ו-II :

I. $a_3, a_7, a_{11}, a_{15}, \ldots$

II. $a_1, -a_3, a_5, -a_7, \ldots$

T הוא הסכום של אין-סוף איברי הסדרה I,

M הוא הסכום של אין-סוף איברי הסדרה II.

הבע באמצעות b את היחס $\frac{M}{T}$. פשט את הביטוי ככל האפשר.

2. $a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n, \ldots$

$S_1, S_2, S_3, \ldots, S_n, \ldots$

$b \neq 0 ; S_1 = 3 ; S_{n+1} = b \cdot S_n + 3$

א. $a_{n+1} = S_{n+1} - S_n = b \cdot S_n + 3 - S_n$

$a_n = S_n - S_{n-1}$

$S_{n+1} = b \cdot S_n + 3 \longrightarrow -b \cdot S_n = -S_{n+1} + 3 \longrightarrow S_n = \frac{S_{n+1} - 3}{b}$

$S_{n-1} = \frac{S_{n-1+1} - 3}{b} = \frac{S_n - 3}{b}$ נציב $n = n-1$

$a_n = S_n - S_{n-1} = S_n - \frac{S_n - 3}{b} =$ נציב S_{n-1} בתוך a_n;

$= \frac{b \cdot S_n - S_n + 3}{b}$

עבור $n \geq 1$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\cancel{b \cdot S_n - S_n} + 3}{\frac{\cancel{b \cdot S_n - S_n} + 3}{b}} = \frac{\frac{1}{1}}{\frac{1}{b}} = b$$

ב.

$$\text{I.}\quad \left.\begin{array}{ccccc} a_3, & a_7, & a_{11}, & a_{15}, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1 \cdot b^2, & a_1 \cdot b^6, & a_1 \cdot b^{10}, & a_1 \cdot b^{14}, & \dots \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_1 = a_1 \cdot b^2 \\ q = b^4 \\ \text{I}\, S_\infty = T \end{array}$$

$$\text{II.}\quad \left.\begin{array}{ccccc} a_1, & -a_3, & a_5, & -a_7, & \dots \\ \downarrow & \downarrow & \downarrow & \downarrow & \\ a_1, & a_1 \cdot (-b^2), & a_1 \cdot b^4, & a_1 \cdot (-b^6), & \dots \end{array}\right\} \begin{array}{l} a_1 = a_1 \\ q = -b^2 \\ \text{II}\, S_\infty = M \end{array}$$

$$\mathrm{I}\ S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1 \cdot b^2}{1-b^4} = T$$

$\mathrm{I}\ S_\infty = T$ נתון

$$\mathrm{II}\ S_\infty = \frac{a_1}{1-q} = \frac{a_1}{1+b^2} = T$$

$\mathrm{II}\ S_\infty = u$ נתון

$\frac{u}{T}$ נתון

$$\frac{u}{T} = \frac{\frac{a_1}{1+b^2}}{\frac{a_1 \cdot b^2}{\underbrace{1-b^4}_{(1-b^2)\ (1+b^2)}}} = \frac{\cancel{a_1}(1-b^2)\cancel{(1+b^2)}}{\cancel{(1+b^2)} \cdot \cancel{a_1} \cdot b^2} = \boxed{\frac{1-b^2}{b^2}}$$

3. בוחרים באקראי 4 אנשים מעיר גדולה. ההסתברות שארבעתם הם בעלי השכלה גבוהה היא 0.0256. ההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין בעלי השכלה גבוהה בעיר קטנה פי 2 מההסתברות לבחור באקראי אדם שמרכיב משקפיים מבין אלו שאינם בעלי השכלה גבוהה.

א. ידוע שאדם מהעיר מרכיב משקפיים. מה ההסתברות שהוא בעל השכלה גבוהה?

ב. בוחרים באקראי 3 אנשים מבין תושבי העיר שאינם בעלי השכלה גבוהה. ההסתברות ששלושתם אינם מרכיבים משקפיים היא $\frac{27}{64}$. מהי ההסתברות שאדם בעיר מרכיב משקפיים והוא גם בעל השכלה גבוהה?

ג. חשב את אחוז מרכיבי המשקפיים בעיר.

א) תחילה נגדיר: ההסתברות שאדם בעל השכלה גבוהה - p.

מכאן: $p^4 = 0.0256$ / אז

$p = \frac{2}{5}$

כעת נבנה טבלה!

	בעל השכלה גבוהה	לא בעל השכלה גבוהה	
עם משקפיים	x	$y = 3x$	$4x$
בלי משקפיים		$\frac{3}{5}\cdot 3x$	
	$\frac{2}{5}$	$\frac{3}{5}$	1

לצורך החישוב נסמן: $P(\text{עם משקפיים} \cap \text{בעל השכלה}) = x$; $P(\text{עם משקפיים} \cap \text{בלי השכלה}) = y$

מכאן המשוואה:

$$\cancel{2}\cdot\frac{x}{\frac{2}{5}} = \frac{y}{\frac{3}{5}}$$

$$\cancel{5}x = \frac{\cancel{5}y}{3}$$

$$3x = y$$

כעת נענה על המבוקש:

$$P\left(\text{בעל השכלה גבוהה} / \text{עם משקפיים}\right) = \frac{x}{4x} = \frac{1}{4}$$

ההסתברות שנבחר מישהו בעל השכלה גבוהה אם ידוע שהוא מרכיב משקפיים היא $\frac{1}{4}$

ב)

$$P\left(\text{שאינו מרכיב משקפיים} / \text{לא בעל השכלה גבוהה}\right) = \frac{\frac{3}{5}-3x}{\frac{3}{5}} = \frac{\frac{3-15x}{\cancel{5}}}{\frac{3}{\cancel{5}}} = \frac{3-15x}{3} = 1-5x$$

לכן:

$$(1-5x)^3 = \frac{27}{64} \quad / \sqrt[3]{\ }$$

$$1-5x = \frac{3}{4}$$

$$4-20x = 3$$

$$20x = 1$$

$$x = \frac{1}{20}$$

ההסתברות שאדם בעיר מרכיב משקפיים והוא בעל השכלה גבוהה היא $0.05 = \frac{1}{20}$

ג) כל מרכיבי המשקפיים הם $4x$ (ראו טבלה).

מכאן:

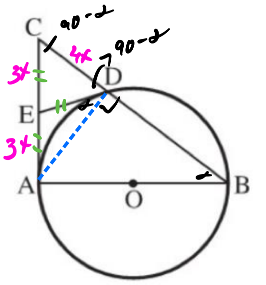
$$4x = 4 \cdot \frac{1}{20} = \frac{1}{5} = \frac{20}{100} = 20\%$$

מרכיבי המשקפיים מהווים 20% מהאנשים.

4. במשולש ישר זווית ABC $(\sphericalangle BAC = 90^\circ)$ הניצב AB הוא קוטר במעגל שמרכזו O. היתר BC חותך את המעגל גם בנקודה D. המשיק למעגל בנקודה D חותך את הניצב AC בנקודה E.

א. הוכח: CE = EA.

ב. נתון: $\frac{CD}{EA} = \frac{4}{3}$ וכן ששטח המשולש CDE הוא 4 סמ"ר. מצא את שטח המשולש ABD. נמק.



טענה	נימוק
$\sphericalangle BAC = 90^\circ$	נתון.
$AE = ED$	2 משיקים היוצאים מאותה נק' מחוץ למעגל, שווים מנק' ההשקה.
בניית עזר AD	סימון.
$\sphericalangle ADB = 90^\circ$	זווית היקפית הנשענת על קוטר שווה 90°.
$\sphericalangle B = \alpha$	סימון
$\sphericalangle C = 90-\alpha$	סכום זוויות במשולש 180°.
$\sphericalangle EDA = \alpha$	זווית בין משיק למיתר שווה לזווית ההיקפית הנשענת על אותו המיתר.
$\sphericalangle ADC = 90^\circ$	סכום זוויות צמודות 180°.
$\sphericalangle EDC = 90-\alpha$	חיסור זוויות.
$\triangle CED$ - משו"ש	משולש בו יש שתי זוויות שוות הוא משו"ש.
$EC = ED$	$\triangle CED$ משו"ש
$EC = AE$	כלל המעבר
מ.ש.ל א'	
$DC = 4x$	סימון
$\frac{DC}{AE} = \frac{4}{3}$	נתון

$AE = 3x = EC$	חישוב + הוכחה בסעיף ב'
$AD^2 + DC^2 = AC^2$	פיתגורס.
$AD^2 + 16x^2 = 36x^2$	חישוב
$AD^2 = 20x^2$	
$AD = \sqrt{20}\,x$	
$S_{\triangle CDE} = S_{\triangle AED}$	תיכון במשולש מחלק את המשולש לשני משולשים שווי שטח.
$\Downarrow$	
$S_{\triangle ADC} = 2 \cdot S_{\triangle CDE}$	
$S_{\triangle CDE} = 4$ סמ"ר	נתון
$\Downarrow$	
$S_{\triangle ADC} = 8$ סמ"ר	חישוב.
$\sphericalangle ADC = \sphericalangle ADB = 90^\circ$	$AD \perp BC$
$\sphericalangle C = \sphericalangle C$	זווית משותפת.
$\triangle ADC \sim \triangle BAC$	לפי ז.ז
$\frac{CD}{AC}$ = יחס הדמיון.	לפי יחס הצלעות בין המשולשים הדומים.
$\Downarrow$	
$\frac{4x}{6x} = \frac{2}{3}$	הצבה.
$\frac{4}{9}$ = יחס השטחים	בין משולשים דומים, יחס השטחים שווה ליחס הדמיון בריבוע.
$\Downarrow$	
$\frac{S_{\triangle ADC}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{2}{3}$	חישוב + הצבה
$\frac{8}{S_{\triangle ABC}} = \frac{4}{9}$	
$S_{\triangle ABC} = 18$ סמ"ר	
$S_{\triangle ABD} = S_{\triangle ABC} - S_{\triangle ADC}$	חיסור שטחים
$S_{\triangle ABD} = 18 - 8$	חישוב

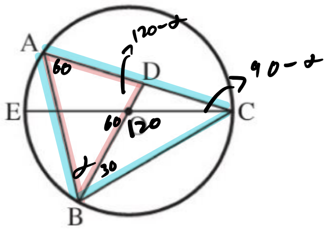
חישוב

$S_{\triangle ABD} = 10$

10 סמ"ר

מ.ש.ל ב'

5. משולש חד זוית ABC חסום במעגל שמרכזו O.
CE הוא קוטר במעגל. המשך הרדיוס BO חותך
את הצלע AC בנקודה D כמתואר בציור.
נתון: $\sphericalangle ABD = \alpha$, הקשת $\overset{\frown}{BC}$ גדולה פי 2
מהקשת $\overset{\frown}{EB}$.



א. חשב את גודל הזווית BAC.
ב. הבע באמצעות α את היחס בין שטח המשולש BAD לשטח המשולש BAC.
ג. נתון גם: $\frac{AD}{AB} = \frac{5}{8}$. מצא את α.

א) $\sphericalangle BOC - 2\beta$, סימון

$\sphericalangle BOE - \beta$, נתון $\overset{\frown}{BC} = \frac{1}{2}\overset{\frown}{EB}$

$3\beta = 180$, סכום זוויות צמודות 180°

$\beta = 60$, חישוב

$\sphericalangle BAC = \frac{1}{2}\sphericalangle BOC$, זווית היקפית שווה למחצית מהזווית המרכזית.

$\sphericalangle BAC = \beta = 60$, הצבה + חישוב.

ב)

$$S_{\triangle ABD} = \frac{AB \cdot AD \cdot \sin(60)}{2}$$
$$S_{\triangle ABC} = \frac{AB \cdot AC \cdot \sin(60)}{2}$$
$$\frac{S_{\triangle ABD}}{S_{\triangle ABC}} = \frac{AD}{AC}$$

נמצא את היחס הזה כדי להתקדם!

$\triangle BOC -$ מש"ש, $R = OC = BO$

$\sphericalangle DBC = 30^\circ$, סכום זוויות במשולש 180° + זוויות בסיס שוות במש"ש.

$\sphericalangle ACB = 90 - \alpha$, סכום זוויות במשולש 180°.

$\frac{AC}{\sin(30+\alpha)} = \frac{AB}{\sin(90-\alpha)}$, משפט הסינוסים במשולש ABC

משפט הסינוסים במשולש ABD , $\frac{AD}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\sin(120-\alpha)}$

$$\frac{AD\cdot\sin(60+\alpha)}{\sin(\alpha)} = AB$$

$$\Downarrow$$

הצבה. , $\frac{AC}{\sin(30+\alpha)} = \frac{\frac{AD\cdot\sin(60+\alpha)}{\sin(\alpha)}}{\cos(\alpha)}$

$$\frac{AC}{\sin(30+\alpha)} = \frac{AD\sin(60+\alpha)}{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}$$

$$\frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(30+\alpha)\sin(60+\alpha)} = \frac{AD}{AC}$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{S_{\Delta BAD}}{S_{\Delta BAC}} = \frac{\sin(\alpha)\cos(\alpha)}{\sin(30+\alpha)\sin(60+\alpha)}$$

ג) נעזר במשוואת מ. הסינוסים מסעיף ב':

$$\frac{AD}{\sin(\alpha)} = \frac{AB}{\sin(120-\alpha)}$$

$$\frac{AD}{AB} = \frac{\sin(\alpha)}{\sin(60+\alpha)} = \frac{5}{8}$$

$$8\sin(\alpha) = 5\sin(60+\alpha)$$

$$8\sin(\alpha) = 5(\sin(60)\cos(\alpha) + \sin(\alpha)\cos(60))$$

$$8\sin(\alpha) = \frac{5\sqrt{3}\cos(\alpha)}{2} + \frac{5\sin(\alpha)}{2}$$

$$16\sin\sin(\alpha) = 5\sqrt{3}\cos(\alpha) + 5\sin(\alpha)$$

$$11\sin(\alpha) = 5\sqrt{3}\cos(\alpha)$$

$$\frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)} = \tan(\alpha) = \frac{5\sqrt{3}}{11}$$

$$\alpha = 38.21^\circ$$

6. נתונות שתי פונקציות: $f(x) = ax^2$, $a > 0$,

$g(x) = \frac{bx}{\sqrt{x^2+4}}$, $b > 0$.

א. מצא תחומי עלייה וירידה של הפונקציה $g(x)$ (אם יש כאלה). נמק.

ב. הבע באמצעות b אסימפטוטות (אם יש כאלה) של הפונקציה $g(x)$ המקבילות לצירים.

ג. הגרפים של שתי הפונקציות נחתכים בשתי נקודות בלבד. שרטט, במערכת צירים אחת, סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ וסקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

ד. נתון שאחת מנקודות החיתוך שבין הגרפים של שתי הפונקציות היא ב- $x = 1$.

כמו כן נתון שהשטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי הפונקציות הוא $\frac{14}{3} - 2\sqrt{5}$.

חשב את ערכי הפרמטרים a ו- b.

א)

$$g'(x) = \frac{b \cdot \sqrt{x^2+4} - bx \cdot \frac{\cancel{2}x}{\cancel{2}\sqrt{x^2+4}}}{x^2+4}$$

$$g'(x) = \frac{b\left(\sqrt{x^2+4} - \frac{x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right)}{x^2+4}$$

$$g'(x) = \frac{b\left(\frac{x^2+4-x^2}{\sqrt{x^2+4}}\right)}{x^2+4}$$

$$g'(x) = \frac{4b}{\sqrt{x^2+4}\,(x^2+4)}$$

מכיוון ש- $0<b$, ו- $0<\sqrt{x^2+4}$, ו- $0<x^2+4$,

אז הנגזרת חיובית לכל x בתח"ה.

תח"ה של gx הוא כל x, לכן: ת. עליה של gx: לכל x.

ת. ירידה של gx: אין

ב) gx מוגדרת לכל x לכן אין אס' אנכיות.

בדיקת אסימפטוטות:

$$\lim_{x\to+\infty} g(x) = \lim_{x\to+\infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{bx}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+4}}{\sqrt{x}}}$$

$$= \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to+\infty} \frac{b}{\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{0}}} = \frac{b}{1} = b$$

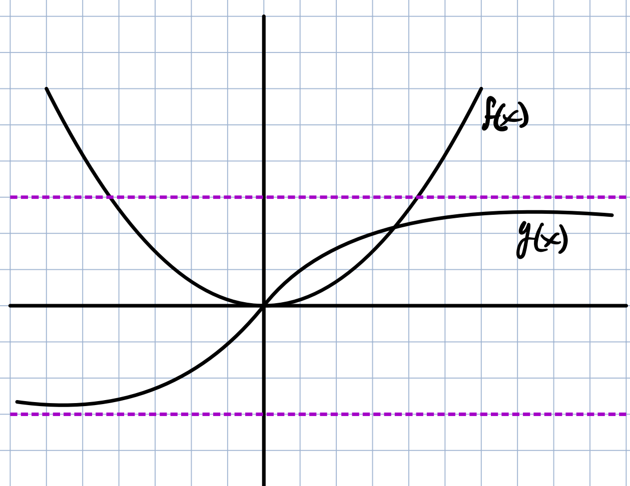
כאשר $x\to+\infty$ $y=b$.

$$\lim_{x\to-\infty} g(x) = \lim_{x\to-\infty} \frac{bx}{\sqrt{x^2+4}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{\frac{x\cdot b}{x}}{\frac{\sqrt{x^2+4}}{-\sqrt{x^2}}}$$

$$= \lim_{x\to-\infty} \frac{b}{-\sqrt{\frac{x^2}{x^2}+\frac{4}{x^2}}} = \lim_{x\to-\infty} \frac{b}{-\sqrt{1+\underbrace{\frac{4}{x^2}}_{0}}} = \frac{b}{-1} = -b$$

כאשר $x\to-\infty$ $y=-b$

ג)



ג) נתון כי אחת נקו' החיתוך היא כאשר $x=1$.

נציב $x=1$ ונשווה בין הפונקציות:

$$\frac{b\cdot 1}{\sqrt{1^2+4}} = a\cdot 1^2$$

$$\frac{b}{\sqrt{5}} = a$$

$$b = \sqrt{5}a$$

$$\int_0^1 (g(x)-f(x))\,dx = \int_0^1 \left(\frac{bx}{\sqrt{x^2+4}} - ax^2\right)dx$$

$$\int_0^1 \left(\frac{\sqrt{5}ax}{\sqrt{x^2+4}} - ax^2\right)dx = \underbrace{\int_0^1 \frac{\sqrt{5}ax}{\sqrt{x^2+4}}\,dx}_{\text{I}} - \underbrace{\int_0^1 ax^2\,dx}_{\text{II}}$$

נשתמש בשיטת ההצבה.

I $\displaystyle\int_0^1 \frac{\sqrt{5}ax}{\sqrt{x^2+4}}\,dx \qquad t = x^2+4 \qquad dt\cdot 1 = 2x\cdot dx$

$$\frac{dt}{2x} = dx$$

$$\int_0^1 \frac{\sqrt{5}a\cancel{x}}{\sqrt{t}}\cdot\frac{dt}{2\cancel{x}} = \int_0^1 \frac{\sqrt{5}a}{2\sqrt{t}}\,dt = \int_0^1 \sqrt{5}a\cdot\frac{1}{2\sqrt{t}}\,dt$$

$$\Big/_0^1\ \sqrt{5}a\sqrt{t} = \Big/_0^1\ \sqrt{5}a\sqrt{x^2+4} \quad \overset{x=1}{\left[\sqrt{5}a\cdot\sqrt{5}\right]} - \overset{x=0}{\left[\sqrt{5}a\cdot\sqrt{4}\right]} = 5a-\sqrt{20}a$$

II $\displaystyle\int_0^1 ax^2\,dx \quad \Big/_0^1\ \frac{ax^3}{3} \quad \overset{x=1}{\left[\frac{a}{3}\right]} - [0] = \frac{a}{3}$

$$5a-\sqrt{20}a-\frac{a}{3} = \frac{14}{3}-2\sqrt{5} \quad /\cdot 3$$

$$15a-3\sqrt{20}a-a = 14-6\sqrt{5}$$

$$14a - 3\sqrt{20}\,a = 14 - 6\sqrt{5}$$

$$a(14 - 3\cdot 2\sqrt{5}) = 14 - 6\sqrt{5}$$

$a = 1$

$b = \sqrt{5}$ לכן:

7. נתונה הפונקציה $f(x)=2-\cos x-\sin^2 x$ בתחום $-\pi \le x \le \pi$.
עבור התחום הנתון ענה על סעיפים א'-ד':
א. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).
ב. מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.
ג. (1) שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.
(2) שרטט סקיצה של גרף פונקציית הנגזרת $f'(x)$ (הפונקציה $f(x)$ גזירה גם בקצות התחום הנתון).
(3) מצא את השטח המוגבל על ידי הגרף של פונקציית הנגזרת $f'(x)$ ועל ידי ציר ה-x בתחום $-\frac{\pi}{3}\le x\le\frac{\pi}{3}$.
ד. נתון כי גרף הפונקציה $g(x)=a-\cos x-\sin^2 x$ משיק לציר x בתחום הנתון בנקודה אחת בלבד. מהו הערך של a? נמק.

א) חיתוך עם x: $(y=0)$

$0 = 2-\cos x-\sin^2 x$ / $-\sin^2 x = \cos^2 x - 1$

$0 = 2-\cos x+\cos^2 x - 1$

$0 = \cos^2 x - \cos x + 1$

$\cos x = t$

$0 = t^2 - t + 1$

אין פתרון.

חיתוך עם y: $(x=0)$

$f(0) = 2-\cos(0)-\sin^2(0)$

$f(0) = 2-1 = 1$

$(0,1)$

ב) אלגו עם הנגזרת:

$f(x) = \cos^2 x - \cos x + 1$

$f'(x) = -2\cos x \sin x + \sin x$

$f'(x) = -\sin x(2\cos x - 1)$

$$0 = -\sin x\,(2\cos x - 1)$$

$$x_1 = \pi k \qquad\qquad \cos x = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x_3 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

k	x_1	x_2	x_3
-1	$-\pi$	x	x
0	0	$\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{3}$
1	π	x	x

x	$-\pi$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π
$f'(x)$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0
$f(x)$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$	min	$\nearrow$	max

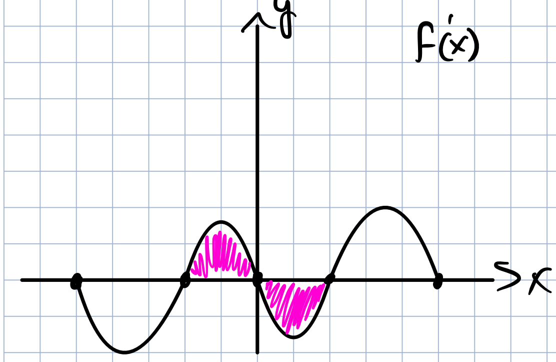
$$f'\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1,\quad f'\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0.3,\quad f'\left(\frac{\pi}{4}\right) = -0.3,\quad f'\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

$$f(-\pi) = 3,\quad f\left(-\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4},\quad f(0) = 1,\quad f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{3}{4},\quad f(\pi) = 3$$

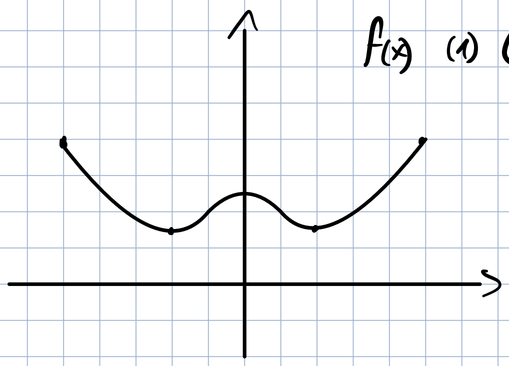
$\max(-\pi, 3)$ $\quad$ $\min\left(-\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$

$\max(\pi, 3)$ $\quad$ $\min\left(\frac{\pi}{3}, \frac{3}{4}\right)$

$f'(x)$ (2)



$f(x)$ (1) (d



* סימנתי כל ערך x שעשה איפוס את $f'(x)$. לאחר מכן נעזרתי בטבלה ע"מ לדעת מתי הנגזרת חיובית ומתי היא שלילית

3) נשים לב כי $f'(x)$ אי זוגית. $(-f'(x)=f'(-x))$

נוכיח:

$$-(-\sin(x)(2\cos x-1)) \overset{?}{=} -\sin(-x)(2\cos(-x)-1)$$

$$\checkmark \quad \sin x(2\cos x-1) = \sin(x)(2\cos(x)-1)$$

פונקציה אי זוגית סימטרית ביחס לראשית הצירים, לכן השטח ברביע ה-2 והשטח ברביע ה-4 שווים.

לכן נחשב רק אחד מהם ואז נכפיל ב-2.

$$\int_{-\frac{\pi}{3}}^{0} f'(x)\,dx = f(x)\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0} = \cos^2(x)-\cos(x)+1\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0}$$

$$\Big|_{-\frac{\pi}{3}}^{0} \underbrace{\left[\cos^2(0)-\cos(0)+1\right]}_{x=0} - \underbrace{\left[\cos^2\left(-\frac{\pi}{3}\right)-\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right)+1\right]}_{x=-\frac{\pi}{3}} = 1-\frac{3}{4} = \frac{1}{4}$$

לכן, השטח המבוקש הוא $2\cdot\frac{1}{4} = \frac{1}{2}$ יח"ר

3) אם נסתכל על גרף הפונקציה כאשר $a=2$, הגרף לא חותך את ציר x.
אם נוריד מערך הפונקציה $\frac{3}{4}$ (ערך נק' המינימום) נקבל 2 נק' השקה עם ציר ה-x.
לעומת זאת, אם נחסר 1 (ערך נק' המקס' המקומי) נקבל נק' השקה אחת בלבד.

מכאן:
$$f(x) = 2-\cos(x)-\sin^2(x) - 1$$
$$f(x) = \underbrace{1}_{a} - \cos(x) - \sin^2(x)$$

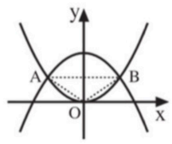
לכן, עבור $a=1$, לגרף הפונקציה יהיה נק' השקה 1 בלבד עם ציר ה-x.

8. הגרפים של הפונקציות $y=-x^2+1$ ו-$y=(a^2-1)x^2$ $(a>1)$ נחתכים בנקודות A ו-B. הנקודה O היא ראשית הצירים.

א. מה צריך להיות הערך של a כדי ששטח המשולש AOB יהיה מקסימלי?

ב. מצא את שיעורי הנקודה B עבור השטח הנ"ל מקסימלי.

ג. נסמן ב-$f(x)$ את הפונקציה שמייצגת את שטח המשולש AOB כאשר $x=a$ ו-$a>1$. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום $x \neq 0$.



8. א.

$$y=-x^2+1$$

$$y=(a^2-1)x^2 \qquad (a>1)$$

נמצא את נק' A ו- B:

$$\begin{cases} y=(a^2-1)x^2 & (a>1) \\ y=-x^2+1 \end{cases}$$

$$(a^2-1)\cdot x^2=-x^2+1 \longrightarrow x^2+(a^2-1)x^2=1 \longrightarrow x^2(\cancel{1}+a^2-\cancel{1})=1 \,/ :a^2$$

$$\longrightarrow x^2=\frac{1}{a^2} \,/\sqrt{\ } \longrightarrow x=\sqrt{\frac{1}{a^2}}=\frac{\sqrt{1}}{\sqrt{a^2}}=\boxed{\pm\frac{1}{a}}$$

נק' A שלילי לכן $x_A=-\frac{1}{a}$, נק' B חיובי לכן: $x_B=\frac{1}{a}$

y_A

$$x_A=-\frac{1}{a}$$

$$y=-x^2+1$$

$$y=-\left(-\frac{1}{a}\right)^2+1$$

$$y=-\frac{1}{a^2}+1$$

y_B

$$x_B=\frac{1}{a}$$

$$\downarrow$$

$$y=-x^2+1$$

$$y=-\left(\frac{1}{a}\right)^2+1$$

$$y=1-\frac{1}{a^2}$$

$$S_{ABO} = \frac{\frac{2}{a}\cdot\left(1-\frac{1}{a^2}\right)}{2} = \frac{a^3-1}{a^3}$$

$$S(a) = \frac{2a^4-3a^4+3a^2}{a^6} = \frac{3a^2-a^4}{a^6}$$

$$\frac{3a^2-a^4}{a^6}=0 \Rightarrow a^4=3a^2 \Rightarrow a^2=3 \Rightarrow a=\pm\sqrt{3}$$

היות ונתון $a>1$, הציון $-\sqrt{3}$ נפסל ונשאר עם $\sqrt{3}$.

לכן $a=\sqrt{3}$

נבדוק בטבלה:

a	1	$\sqrt{3}$	4
y'	$+$	0	$-$
y	↗	max	↘

עבור $a=\sqrt{3}$ השטח AOB מקסימלי.

נק' B הינה:

ד. $\left(\frac{1}{a} , 1 - \frac{1}{a^2} \right)$

נציב $a=\sqrt{3}$

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , -\frac{1}{(\sqrt{3})^2} + 1 \right) =$$

$$B\left(\frac{1}{\sqrt{3}} , \frac{2}{3} \right)$$

ה.