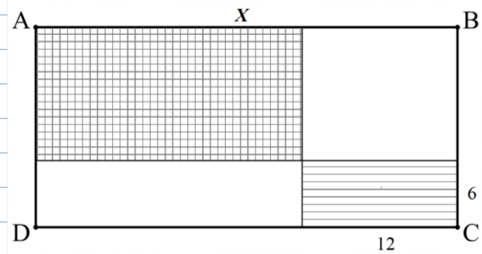
במלבן $ABCD$ חסומים שני מלבנים שונים, כמתואר בציור. רוחבו של המלבן המקווקו הוא 6 ס"מ ואורכו 12 ס"מ. שטח המלבן $ABCD$ כולו הוא 400 סמ"ר.



נסמן את צלע המלבן הגדול, $AB = x$.

א. הבע באמצעות x את שטח המלבן המשובץ.

ב. מצא את האורך והרוחב של המלבן $ABCD$ שעבורם שטח המלבן המשובץ מקסימלי.

לפי נתוני השאלה שטח המלבן $ABCD$ כולו הוא $400\,cm^2$ וגם $AB=x$ לכן ניתן לבטא את צלע BC:

$BC \cdot x = 400 \Rightarrow BC = \frac{400}{x}$

כעת ננסה לבטא את אורכי הצלעות של המלבן המשובץ:

- אורך הצלע האופקית שלו היא $x-12$
- אורך הצלע האנכית שלו הוא $\frac{400}{x} - 6$

ולכן שטח המלבן המשובץ הוא

$$S = (x-12)\cdot\left(\frac{400}{x} - 6\right) = 400 - 6x - \frac{4800}{x} + 72 = 472 - 6x - \frac{4800}{x}$$

ב. בעצם מצאנו בסעיף הקודם את פונ' המטרה שלנו! לכן בשביל למצוא ערכי קיצון נגזור ונשווה ל-0 את הביטוי שמצאנו לשטח המלבן המשובץ

$$S' = -6 + \frac{4800}{x^2}$$

$$-6 + \frac{4800}{x^2} = 0 \Rightarrow 6x^2 = 4800 \;|:6 \Rightarrow x^2 = 800$$

$$x = 10\sqrt{8}$$

נבדוק שאכן $x = 10\sqrt{8}$ הוא ערך מקסימלי

x	$0 < x < 10\sqrt{8}$	$10\sqrt{8}$	$10\sqrt{8} < x$
$S'(x)$	+	0	−
$S(x)$	↗	Max	↘

אכן $x=10\sqrt{8}$ הוא ערך קיצון מקסימלי של הפונ' נמצא את אורך צלע BC

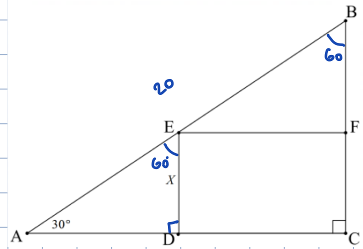
$$BC=\frac{400}{x}=\frac{400}{10\sqrt{8}}=10\sqrt{2}$$

תשובה סופית: אורכי הצלעות שעבורן שטח המלבן המשובץ הוא מקסימלי הם

$10\sqrt{2}$, $10\sqrt{8}$

נתון משולש ישר זווית ABC, $\measuredangle C = 90°$, $\measuredangle A = 30°$.

אורך היתר AB הוא 20 ס״מ. $DEFC$ מלבן החסום במשולש כפי שמתואר בציור. נסמן: $DE = x$.



א. הבע באמצעות x את אורך הצלע EF.

ב. מה צריך להיות ערכו של x, כדי ששטח המלבן כולו יהיה מקסימלי?

א. נשתמש במשפט הסינוסים במשולש ABC ו ADE:

$$\frac{AC}{\sin 60} = \frac{AB}{\sin 90} \Rightarrow AC = 20\sin 60 = 10\sqrt{3}$$

כעת במשולש ADE:

$$\frac{AD}{\sin 60} = \frac{x}{\sin 30} \Rightarrow AD = \frac{x\sin 60}{\sin 30} = \sqrt{3}x$$

סה״כ:

$$EF = DC = AC - AC = 10\sqrt{3} - \sqrt{3}x = \boxed{\sqrt{3}(10-x)}$$

ב. כעת נחשב את פונ׳ המטרה: פונ׳ המבטאת את שטח המלבן כתלות ב-x

$$S(x) = x\cdot\sqrt{3}(10-x) = 10\sqrt{3}x - \sqrt{3}x^2$$

בשביל למצוא את שטח המלבן המקסימלי נגזור את פונ׳ המטרה, נשווה ל-0 ונחפש ערכי קיצון מקסימליים:

$$S'(x) = 10\sqrt{3} - 2\sqrt{3}x$$

$$2\cancel{\sqrt{3}}x = 10\cancel{\sqrt{3}} \Rightarrow x = 5$$

נוודא שזה אכן סוג מקסימום:

x	0 < x < 5	5	5 < x
S'(x)	+	0	−
S(x)	↗	max	↘

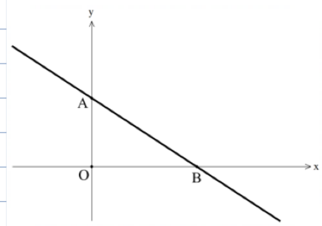
$\boxed{\text{לכן עבור } x=5 \text{ שטח המלבן כולו מקסימלי}}$

בציור מתואר הישר הבא : $y = -\frac{1}{9}t^2x + t$, t פרמטר חיובי.

א. הבע באמצעות t את שיעורי נקודות החיתוך של הישר עם הצירים

ב. נסמן את נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-x כנקודה A ואת נקודת החיתוך של הישר עם ציר ה-y כנקודה B. מצא את ערכו של t שעבורו סכום המרחקים של הנקודות A ו-B מראשית הצירים מינמלי.

ג. מצא את משוואת הישר עבור ערך t שמצאת בסעיף ב'



א. חיתוך עם ציר -x ($y=0$)

$$0 = -\frac{1}{9}t^2x + t$$

$$\frac{1}{9}t^2x = t \Rightarrow x = \frac{t}{\frac{1}{9}t^2} = \frac{9}{t}$$

חיתוך עם ציר -x $\left(\frac{9}{t}, 0\right)$

חיתוך עם ציר y $(x=0)$

$$y = -\frac{1}{9}t^2 \cdot 0 + t = t$$

חיתוך עם ציר -y $(0, t)$

ב. נרשום את פונ' המטרה שלנו: פונ' סכום של שיעורי הנק' ביחס לראשית הצירים

$$f(t) = t + \frac{9}{t}$$

נמצא ערכי קיצון:

$$f'(t) = 1 - \frac{9}{t^2}$$

$$1 - \frac{9}{t^2} = 0 \Rightarrow t^2 = 9$$

$$t = \pm 3$$

לפי נתוני השאלה $t>0$ ולכן נבחר $t=3$

נוודא שאכן $t=3$ הוא ערך מינימום:

t	$0 < t < 3$	3	$3 < t$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

לכן עבור $t=3$ סכום המרחקים ש נק' A ו- B מהראשית מינימלי

ג. נציב $t=3$ במשוואה הנתונה

$$y = -\frac{1}{9}\cdot(3)^2\cdot x + 3$$

$$y = -x+3$$