

$$y = 2 \sin x + 3x \quad .1$$

$$y' = 2 \cos(x) + 3$$

$$y = x^2 \sin x \quad .5$$

$$y' = 2x \sin(x) + x^2 \cdot \cos(x)$$

$$y' = x(2 \sin(x) + x \cos(x))$$

$$y = 5x - 2 \sin 4x \quad .11$$

$$y' = 5 - 2 \cos(4x) \cdot 4 = 5 - 8 \cos(4x)$$

$$y = x \sin 3x \quad .12$$

$$y' = 1 \cdot \sin(3x) + x \cdot \cos(3x) \cdot 3$$

$$y' = \sin(3x) + 3x \cos(3x)$$

$$y = 3 \sin x \cos x \quad .21$$

$$y' = 3 \cos(x) \cdot \cos(x) + 3 \sin(x) \cdot (-\sin(x))$$

$$y' = 3 \cos^2(x) - 3 \sin^2(x)$$

$$y = \cos^3 x \quad .24$$

$$y' = 3 \cos^2(x) \cdot -\sin x$$

$$y' = -3 \cos^2(x) \cdot \sin(x)$$

$$y = 2 \cos \frac{x}{2} \quad .27$$

$$y' = -2 \sin\left(\frac{x}{2}\right) \cdot \frac{1}{2} = -\sin\left(\frac{x}{2}\right)$$

$$y = 2 \cos x^4 \quad .30$$

$$y' = -2 \sin(x^4) \cdot 4x^3 = -8x^3 \sin(x^4)$$

$$y = \tan x - 3x \quad .32$$

$$y' = \frac{1}{\cos^2(x)} - 3$$

$$y = 3 \sin x \tan x \quad .35$$

$$y' = 3 \cos(x) \cdot \tan(x) + 3 \sin(x) \cdot \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$y' = 3 \cos(x) \cdot \tan(x) + \frac{3 \sin(x)}{\cos^2(x)}$$

$$y' = 3 \cos(x) \tan(x) + 3 \tan(x) \cdot \frac{1}{\cos(x)}$$

$$y' = 3 \tan(x) \left(\cos(x) + \frac{1}{\cos(x)} \right) = 3 \left(\sin(x) + \frac{\tan(x)}{\cos(x)} \right)$$

$$y = 2 \tan^3 3x \quad .41$$

$$y' = 6 \tan^2(3x) \cdot \frac{3}{\cos^2(3x)} = \frac{18 \tan^2(3x)}{\cos^2(3x)}$$

$$y = \frac{1}{5} \tan\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right) \quad .43$$

$$y' = \frac{1}{5} \cdot \frac{-4}{\cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)} = -\frac{4}{5 \cos^2\left(\frac{\pi}{2} - 4x\right)}$$

1. מתוך בגרות קיץ 1967

נתונה הפונקציה: $y = 2 \sin x + \sin 2x$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.

- מהו תחום הגדרת הפונקציה?
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.
- מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה.
- שרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנייל.

(k) ת"ח: $x \in \mathbb{R}$

(0) חיתוך עם x: $(y=0)$

$$0 = 2 \sin(x) + \sin(2x) \quad | \quad \sin(2x) = 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$0 = 2 \sin(x) + 2 \sin(x) \cos(x)$$

$$0 = 2 \sin(x) (1 + \cos(x))$$

$$\swarrow$$

$$\sin(x) = 0$$

$$x_1 = \pi k$$

$$\searrow$$

$$1 + \cos(x) = 0$$

$$\cos(x) = -1$$

$$x_2 = \pi + 2\pi k$$

k	x_1	x_2
-1	x	x
0	0	π
1	π	x
2	2π	x

$(0, 0)$

\rightarrow נקודות

$(\pi, 0)$

$(2\pi, 0)$

$$y' = 2\cos(x) + 2\cos(2x) \quad / \quad \cos(2x) = 2\cos^2(x) - 1 \quad (c)$$

$$y' = 2\cos(x) + 2 \cdot (2\cos^2(x) - 1)$$

$$y' = 2\cos(x) + 4\cos^2(x) - 2$$

$$y' = 4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2$$

$$0 = 4\cos^2(x) + 2\cos(x) - 2$$

$$\cos(x) = t \quad / \quad | \cdot 10$$

$$0 = 4t^2 + 2t - 2$$

$$t_1 = \frac{1}{2} \quad t_2 = -1$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2} \quad \cos(x) = -1$$

$$x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k \quad x_3 = \pi + 2\pi k$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

k	x_1	x_2	x_3
-1	X	X	X
0	$\frac{\pi}{3}$	X	π
1	X	$\frac{13}{3}\pi$	X

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
y'		+	0	-	0	-	0	+	
y	m	↑	m	↓		↓	m	↑	m
	i		a				i		a
	n		x				n		x

$$y'(\frac{\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

$$y'(\frac{3\pi}{4}) = -\sqrt{2}$$

$$y'(\frac{4\pi}{3}) = -2$$

$$y'(\frac{7\pi}{4}) = \sqrt{2}$$

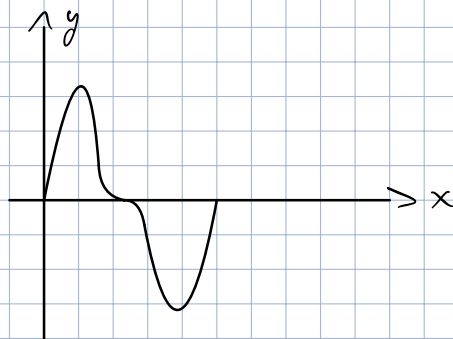
$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{3}\right) = 2.6, \quad y\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2.6, \quad y(2\pi) = 0$$

$$\min(0, 0), \quad \max\left(\frac{\pi}{3}, 2.6\right), \quad \min\left(\frac{5\pi}{3}, -2.6\right), \quad \max(2\pi, 0)$$

$$\frac{5\pi}{3} < x < 2\pi \quad \text{or} \quad 0 < x < \frac{\pi}{3} \quad \text{---} \text{ } \frac{1}{2} \text{ } (3)$$

$$\pi < x < \frac{5\pi}{3} \quad \text{or} \quad \frac{\pi}{3} < x < \pi \quad \text{---} \text{ } \frac{1}{2} \text{ } (3)$$

(3)



11. מתוך בגרות חורף 2006 עם שינוי

נתונה הפונקציה: $y = 1 - 2 \cos 2x$ בתחום $-\frac{\pi}{6} \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$.

- א. מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר ה-x.
 ב. מצא את שיעורי נקודות הקיצון המוחלטות, וקבע את סוגן.
 ג. מצא את תחומי העלייה והירידה.
 ד. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנ"ל.

(א) חיתוך עם ציר ה-x: $(y=0)$

$$0 = 1 - 2 \cos(2x)$$

$$2 \cos(2x) = 1$$

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$2x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

k	x_1	x_2
-1	x	x
0	$\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{6}$
1	x	x

$(\frac{\pi}{6}, 0), (-\frac{\pi}{6}, 0)$

(2)

$$y' = -2(-\sin(2x) \cdot 2)$$

$$y' = 4\sin(2x)$$

$$0 = 4\sin(2x)$$

$$2x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi k}{2}$$

k	X
-1	x
0	0
1	$\frac{\pi}{2}$

X	$-\frac{\pi}{6}$	$-\frac{\pi}{8}$	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{12}$	$\frac{2\pi}{3}$
		-	0	+	0	-	
	max	\searrow	min	\nearrow	max	\searrow	min

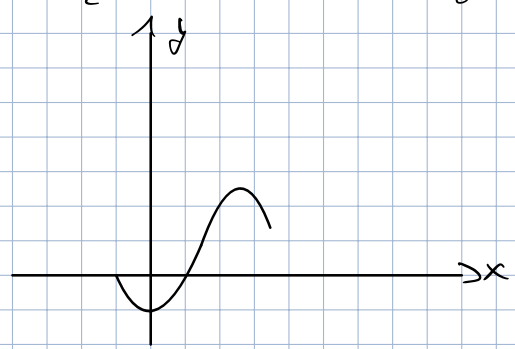
$$y'(\frac{\pi}{8}) = -2\sqrt{2}, \quad y'(\frac{\pi}{3}) = 2\sqrt{3}, \quad y'(\frac{7\pi}{12}) = -2$$

$$y(-\frac{\pi}{6}) = 0, \quad y(0) = -1, \quad y(\frac{\pi}{2}) = 3, \quad y(\frac{2\pi}{3}) = 2$$

$$\max(-\frac{\pi}{6}, 0), \quad \min(0, -1), \quad \max(\frac{\pi}{2}, 3), \quad \min(\frac{2\pi}{3}, 2)$$

$$0 < x < \frac{\pi}{2} \quad \therefore \text{Ist.} \quad (d)$$

$$\frac{\pi}{2} < x < \frac{2\pi}{3} \quad \text{odl} \quad -\frac{\pi}{6} < x < 0 \quad \therefore \text{Ist.} \quad (e)$$



(3)

12. מתוך בגרות חורף 2006 מועד ב' עם שינוי

נתונה הפונקציה: $f(x) = \sin x - \cos^2 x - 1$, בתחום $0 \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$.

- הראה כי $f(x) = \sin^2 x + \sin x - 2$.
- מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.
- מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ בתחום הנתון.

$$\sin^2(x) + \cos^2(x) = 1 \quad (\text{שני ריבועים נכבדים})$$

\Downarrow

$$\cos^2(x) = 1 - \sin^2(x)$$

\Downarrow

$$f(x) = \sin(x) - (1 - \sin^2(x)) - 1$$

$$f(x) = \sin(x) - 1 + \sin^2(x) - 1$$

$$f(x) = \sin^2(x) + \sin(x) - 2$$

(ב) חיתוך עם x: $(y=0)$

$$0 = \sin^2(x) + \sin(x) - 2$$

$$\sin(x) = t \quad / \quad \text{הצבה}$$

$$0 = t^2 + t - 2$$

\Leftarrow

\rightarrow

$$t_1 = 1$$

$$t_2 = -2$$

$$\sin(x) = 1$$

~~$$\sin(x) = 2$$~~

$$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$\sin(x) / \cos(x) = -1 \leq x \leq 1$$

k	x
-1	x
0	$\frac{\pi}{2}$
1	x

$(\frac{\pi}{2}, 0)$

$(x=0)$ ig al p'ris

$$0 = \sin^2(0) + \sin(0) - 2 = -2$$

$(0, -2)$

$$f'(x) = 2 \sin(x) \cos(x) + \cos(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)(2 \sin(x) + 1)$$

$$\begin{array}{l} \swarrow \quad \searrow \\ \cos(x) = 0 \quad 2 \sin(x) + 1 = 0 \end{array}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad 2 \sin(x) = -1$$

$$\sin(x) = -\frac{1}{2}$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x_3 = \frac{7\pi}{6} + 2\pi k$$

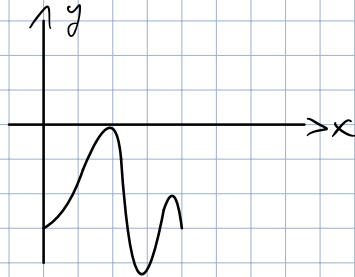
k	x_1	x_2	x_3
-1	x	x	x
0	$\frac{\pi}{2}$	x	$\frac{7\pi}{6}$
1	$\frac{3\pi}{2}$	x	x

x	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{19\pi}{12}$	$\frac{5\pi}{3}$
$f'(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f(x)$	min	↗	max	↘	min	↗	max	↘	min

$$f'(\frac{\pi}{3}) = 1.366, f'(\pi) = -1, f'(\frac{4\pi}{3}) = 0.366, f'(\frac{19\pi}{12}) = -0.24$$

$$f(0) = -2, f\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0, f\left(\frac{7\pi}{8}\right) = -\frac{9}{4}, f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -2, f\left(\frac{5\pi}{3}\right) = -2.116$$

$$\min(0, -2), \overset{\text{Global}}{\max}\left(\frac{\pi}{2}, 0\right), \overset{\text{Global}}{\min}\left(\frac{7\pi}{8}, -\frac{9}{4}\right), \max\left(\frac{3\pi}{2}, -2\right), \min\left(\frac{5\pi}{3}, -2.116\right)$$



(3)