

$$\int (3x^2 - \frac{4}{\cos^2 x}) dx \quad .6$$

$$\int (3x^2 - 4 \cdot \frac{1}{\cos^2 x}) dx$$

$$= \frac{3x^3}{3} - 4 \cdot \tan(x) + C$$

$$= x^3 - 4 \tan(x) + C$$

$$\int (2 \sin x + 4 \cos x) dx \quad .7$$

$$-2 \cos(x) + 4 \sin(x) + C$$

$$\int (\frac{\sin 2x}{2} - x) dx \quad .9$$

$$\int (\frac{1}{2} \cdot \sin(2x) - x) dx$$

$$= \frac{-\frac{1}{2} \cos(2x)}{2} - \frac{x^2}{2} + C$$

$$= -\frac{\cos(2x)}{4} - \frac{x^2}{2} + C$$

$$\int 3 \cos(5 - 4x) dx \quad .11$$

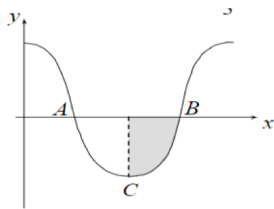
$$\frac{3 \sin(5 - 4x)}{-4} + C$$

$$\int (-\frac{\sin(\frac{\pi}{2} + 3x)}{4}) dx \quad .12$$

$$= (-\frac{1}{4} \cdot \sin(\frac{\pi}{2} + 3x)) dx$$

$$= \frac{\frac{1}{4} \cos(\frac{\pi}{2} + 3x)}{3} + C$$

$$= \frac{\cos(\frac{\pi}{2} + 3x)}{12} + C$$



2. מתוך בגרות קיץ 2006

בציור שלפניך מתואר הגרף של הפונקציה $y = 3 \cos 3x$

$$\text{בתחום } 0 \leq x \leq \frac{2\pi}{3}$$

נקודות A ו-B הן נקודות החיתוך של הגרף עם ציר x,

ונקודה C היא נקודת מינימום של הפונקציה.

א. מצא את שיעורי הנקודה B.

ב. מצא את שיעורי הנקודה C.

ג. מהנקודה C הורידו אנך לציר ה-x. חשב את השטח המוגבל על ידי האנך, על

ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר x.

(א) ניוטון למ x : $(y=0)$

$$0 = 3 \cos(3x) \quad /:3$$

$$\cos(3x) = 0$$

$$3x = \frac{\pi}{2} + \pi k \quad /:3$$

$$x = \frac{\pi}{6} + \frac{\pi k}{3}$$

k	x
-1	x
0	$\frac{\pi}{6}$
1	$\frac{\pi}{2}$
2	x

$$A\left(\frac{\pi}{6}, 0\right) \quad B\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$$

(ב) נגזרת היק' ציון:

$$y' = -3 \sin(3x) \cdot 3 = -9 \sin(3x)$$

$$0 = -9 \sin(3x)$$

$$\sin(3x) = 0$$

$$3x = \pi k$$

$$x = \frac{\pi}{3} k$$

k	x
-1	x
0	0
1	$\frac{\pi}{3}$
2	$\frac{2\pi}{3}$

x	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$
y'	0	-	0	+	0
y	max		min		max

\nearrow \searrow \nearrow

\nearrow \searrow \nearrow

\nearrow \searrow \nearrow

$$y'(\frac{\pi}{4}) = -4.5\sqrt{2}, \quad y'(\frac{\pi}{2}) = 9$$

$$y(\frac{\pi}{3}) = -3$$

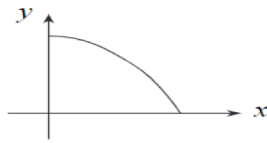
$$C(\frac{\pi}{3}, -3)$$

$$\int_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} (0 - 3\cos(3x)) dx = \frac{-3\sin(3x)}{3} \quad (c)$$

$$= -\sin(3x) \Big|_{\frac{\pi}{3}}^{\frac{\pi}{2}} = (-\sin(3 \cdot \frac{\pi}{2})) - (-\sin(3 \cdot \frac{\pi}{3})) =$$

$$= 1 + 0 = 1$$

l''n'



נתונה הפונקציה $y = \cos 2x$, בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{4}$. (ראה ציור).

ישר משיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x = \frac{\pi}{4}$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, על ידי המשיק ועל ידי ציר y.

א) (מצא את המשיק) ה'ע'ים'ים' ב'ל'ג'ר'ף ה'פ'ונ'ק'צ'יה:

$$y' = -\sin(2x) \cdot 2 = -2\sin(2x)$$

$$y'(\frac{\pi}{4}) = -2\sin(\frac{\pi}{2}) = -2 = m$$

(מצא את ערך y-0) ב'נ'ק'ת ה'מ'ש'ק.

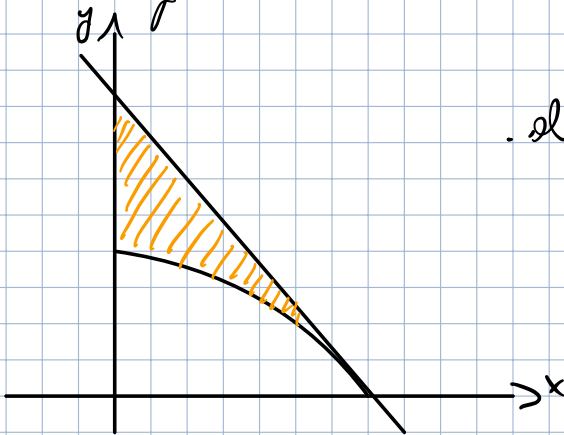
$$y(\frac{\pi}{4}) = \cos(\frac{\pi}{2}) = 0$$

$$(\frac{\pi}{4}, 0), m = -2$$

~~מצא את משוואת המשיק:~~

$$y - 0 = -2(x - \frac{\pi}{4})$$

$$y = -2x + \frac{\pi}{2}$$



ב) צ'ו'ר ל'ש'ט'ח ה'מ'ש'ק.

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(-2x + \frac{\pi}{2} - (\cos(2x))\right) dx$$

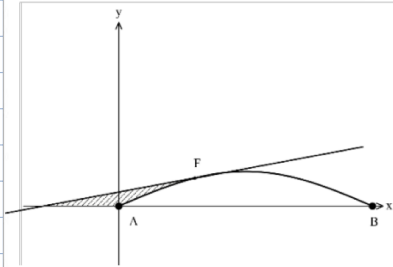
$$\left[-\frac{2x^2}{2} + \frac{\pi}{2}x - \frac{\sin(2x)}{2} \right]_0^{\frac{\pi}{2}}$$

$$\left[-\left(\frac{\pi}{2}\right)^2 + \frac{\pi \cdot \frac{\pi}{2}}{2} - \frac{\sin(\pi)}{2} \right] - \left(-0^2 + \frac{\pi}{2} \cdot 0 - \frac{\sin(2 \cdot 0)}{2} \right)$$

$$S = -\frac{\pi^2}{16} + \frac{\pi^2}{8} - \frac{1}{2} = 0.116$$

b"n

6. מתוך בגרות קיץ 2012 מועד ב'



נתונה הפונקציה $f(x) = \sin 2x$ בתחום

$$0 \leq x \leq \frac{\pi}{2}$$

הפונקציה בנקודה F ומקביל לישר $y = x$.

א. מצא את משוואת המשיק.

ב. מצא את נקודת החיתוך של המשיק עם ציר ה- x . בתשובתיך תוכל

להשאיר π ושורש.

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי המשיק, על ידי גרף הפונקציה $f(x)$ ועל ידי

ציר ה- x .

א) וטרי הנקמה לשר $y=x$, הסינוס שלו הוא 1.
 בשר, נחמל בא'15 קבוצה סינוס הפונקציה הוא 1.

$$f(x) = 2 \cos(2x)$$

* נשואה שר הנאמר ל-1
 ע"ה לסינוס קבוצה 15.

$$2 \cos(2x) = 1$$

$$\cos(2x) = \frac{1}{2}$$

$$2x_1 = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$2x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$$

$$x_1 = \frac{\pi}{6} + \pi k$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{6} + \pi k$$

k	x_1	x_2
-1	x	x
0	$\frac{\pi}{6}$	x
1	x	x

בשר $x = \frac{\pi}{6}$ סינוס האטק

אשר הסינוס צ"ה הוא 1.

(נצט) שר עיק ה-y ש'15.

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\left(\frac{\pi}{8}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right), m=1$$

משוואת הישר:

$$y - \frac{\sqrt{3}}{2} = 1(x - \frac{\pi}{8})$$

$$y = x - \frac{\pi}{8} + \frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$y = x + 0.34$$

(2) חינוק של הישר עם x: $y=0$

$$0 = x + 0.34$$

$$x = -0.34$$

$$(0, -0.34)$$

(ב) נחלק את הישר למני חלקים, כשער צ'י ה-y הוא החוצה. $S_1 =$ היטח משמש לצ'י y.
 $S_2 =$ היטח מינין לצ'י y.

נשים לב כי S_1 הוא משולש. נחשב אותו עם נוסחת שטח משולש.

• נמצא את חינוק הישר עם צ'י y. $y(0) = 0 + 0.34$

• אורך "בסיס המשולש" הוא $(0, 0.34)$

כא 0.34 . $\left. \begin{array}{l} \text{הגובה בין ק' החינוק} \\ \text{של הישר עם צ'י x אין} \\ \text{צ'י ה-y בעק משולש} \end{array} \right\}$

$$S_1 = \frac{0.34 \cdot 0.34}{2} = \frac{289}{5000} = 0.0578$$

השטח הנשאל S_2 הוא $\frac{1}{2}$

$$\int_0^{\frac{\pi}{6}} (x + 0.34 - \sin(2x)) dx$$

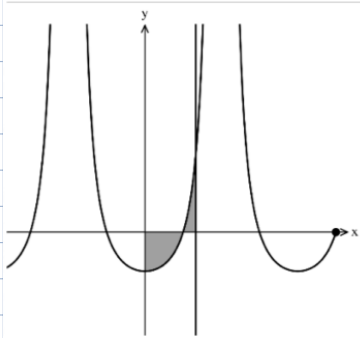
$$\frac{x^2}{2} + 0.34x + \frac{\cos(2x)}{2}$$

$$\left(\frac{(\frac{\pi}{6})^2}{2} + 0.34 \cdot \frac{\pi}{6} + \frac{\cos(\frac{\pi}{3})}{2} \right) - \left(\frac{(0)^2}{2} + 0.34 \cdot 0 + \frac{\cos(2 \cdot 0)}{2} \right)$$

$$S_2 = \frac{\pi^2}{72} + \frac{17\pi}{300} + \frac{1}{4} - \frac{1}{2}$$

$$S_2 = 0.0651$$

$$S_1 + S_2 = 0.1237 \approx \frac{1}{8}$$



7. מתוך בגרות חורף 2013

$$f(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 2$$

נתונה הפונקציה בתחום $-\frac{5\pi}{4} \leq x \leq \frac{5\pi}{4}$ (ראה ציור).

בקטע הנתון מצא:

א. את תחום ההגדרה של הפונקציה ואת האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לציר ה-y.

ב. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם ציר x.

ג. בתחום $0 \leq x \leq \frac{\pi}{3}$ מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה ועל ידי ציר

ה-x (השטח האפור)

$$\cos^2(x) \neq 0$$

(k) ת"ג:

ת.ס.ל:

$$\cos^2(x) = 0$$

$$\cos(x) = 0$$

$$x = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

k	x
-1	$-\frac{\pi}{2}$
0	$\frac{\pi}{2}$
1	x

$$x \neq \pm \frac{\pi}{2}$$

$$x = \pm \frac{\pi}{2}$$

de אנדר:

$$(y=0)$$

(b) כו"מק ל"ב x:

$$0 = \frac{1}{\cos^2(x)} - 2$$

$$2 = \frac{1}{\cos^2(x)}$$

$$2 \cos^2(x) = 1$$

$$\cos^2(x) = \frac{1}{2} \quad \sqrt{\quad}$$

$$\cos(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_1 = \frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{4} + 2\pi k$$

$$\cos(x) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$x_3 = \frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

$$x_4 = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$$

k	x_1	x_2	x_3	x_4
-1	x	x	$-\frac{5\pi}{4}$	x
0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{3\pi}{4}$
1	x	x	x	$\frac{5\pi}{4}$

$$\left(-\frac{5\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{5\pi}{4}, 0\right)$$

$$\left(-\frac{3\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{3\pi}{4}, 0\right)$$

$$\left(-\frac{\pi}{4}, 0\right), \left(\frac{\pi}{4}, 0\right)$$

השטח הנדרש הוא סכום שטחי שני השטחים.
 נקרא לשטח שמאל S_1 ולשטח ימני S_2

$$S_1 = \int_0^{\frac{\pi}{4}} (0 - (\cos^2(x) - 2)) dx + \int(\frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{4}) (-\frac{1}{\cos^2(x)} + 2) dx$$

$$- \tan(x) + 2x$$

$$- \tan\left(\frac{\pi}{4}\right) + \frac{\pi}{2} - (-\tan(0) + 2 \cdot 0)$$

$$S_1 = \frac{\pi}{2} - 1$$

$$S_2 = \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} (\cos^2(x) - 2) dx + \int_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{3}} \tan(x) - 2x$$

$$\tan\left(\frac{\pi}{3}\right) - \frac{2\pi}{3} - \left(\tan\left(\frac{\pi}{4}\right) - \frac{\pi}{2}\right)$$

$$S_2 = \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{2} - 1 + \sqrt{3} - \frac{2\pi}{3} - 1 + \frac{\pi}{2}$$

$$S_1 + S_2 = \frac{\pi}{3} - 2 + \sqrt{3} = 0.779$$

l'p'

5. מתוך בגרות חורף 1995

נתונה הפונקציה $y = \sin^2 x + p \sin x - 6$ בתחום $0 \leq x \leq 2\pi$.לפונקציה יש נקודת קיצון ב- $x = \frac{\pi}{6}$.

- חשב את p , ורשום את הפונקציה.
- הסבר מדוע לפונקציה אין חיתוך עם ציר ה- x .
- מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה וקבע את סוגן.
- סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

(ע) מהימיונים ואילו לעירובי שם המילוטא:

$$f'(\frac{\pi}{6}) = 0$$

(הצב שם הנצטר, ונלמט המילוטא)
אנא השתדל לכתוב p .

$$f'(x) = 2\sin(x)\cos(x) + p\cos(x)$$

$$f'(x) = \cos(x)(2\sin(x) + p)$$

$$f'(\frac{\pi}{6}) = 0$$

$$\cos(\frac{\pi}{6})(2\sin(\frac{\pi}{6}) + p) = 0$$

שונה ל-0

$$\rightarrow 2\sin(\frac{\pi}{6}) = -p$$

$$\sin(\frac{\pi}{6}) = -\frac{p}{2}$$

$$\frac{1}{2} = -\frac{p}{2}$$

$$p = -1$$

$$f(x) = \sin^2(x) - \sin(x) - 6$$

(ב) צורק את הפונקציה כדי לגבין אותה אין בירוק עם x.

$$f(x) = \sin^2(x) - \sin(x) - 6$$

בא זכר ה-y
(שאלתם הפונקציה).

פונקציה הסינוס וכוונת
לחברתה זכר x בק
-1 ≤ x ≤ 1
בא ז.

צורה 2 גורמת
להקצות! (ציה $\sin(x) = 1$)
||

$$1^2 - 1 = 0$$

$$\sin(x) = -1$$

$$(-1)^2 - (-1) = 2$$

2 הוא הערך האבה בירוק
ש הביטוי $\sin^2(x) - \sin(x)$ שווה לו.

מכיוון שפסול הפונקציה יש (-6) שש

הערך האבה בירוק של f(x) והוא (-4). $(-4) = (-6) + 2$

* תינסף לא בעיה לנצק את הביטוי בצורה גורמת.
בא זמן שלא רטוב במפורט אם לחלף שש שאלה.

$\left\{ \begin{array}{l} \text{Vorgehensweise?} \\ \text{in 1105} \end{array} \right\} f'(x) = \cos(x)(2\sin(x)-1)$

(d)

$$0 = \cos(x)(2\sin(x)-1)$$

$$\swarrow$$

$$\cos(x) = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$\searrow$$

$$2\sin(x) - 1 = 0$$

$$2\sin(x) = 1$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

k	x ₁	x ₂	x ₃
-1	X	X	X
0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
1	$\frac{3\pi}{2}$	X	X

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{7\pi}{4}$	2π
f'(x)		-	0	+	0	-	0	+	0	-	
f(x)	max	\searrow	min	\nearrow	max	\searrow	min	\nearrow	max	\searrow	min

$$f'\left(\frac{\pi}{8}\right) = -0.21, \quad f'\left(\frac{\pi}{3}\right) = 0.36, \quad f'\left(\frac{2\pi}{3}\right) = -0.36$$

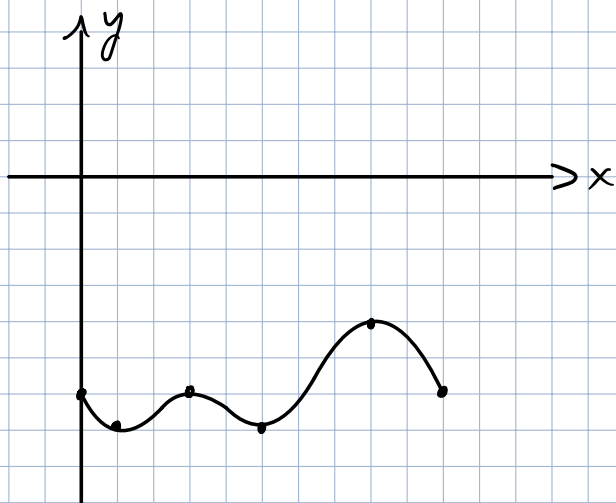
$$f'(\pi) = 1, \quad f'\left(\frac{7\pi}{4}\right) = -1.7$$

$$f(0) = -6, \quad f\left(\frac{\pi}{6}\right) = -6.25, \quad f\left(\frac{\pi}{2}\right) = -6, \quad f\left(\frac{5\pi}{6}\right) = -6.25$$

$$f\left(\frac{3\pi}{2}\right) = -4, \quad f(2\pi) = -6$$

$$\max(0, -6), \min\left(\frac{\pi}{6}, -6.25\right), \max\left(\frac{\pi}{2}, -6\right), \min\left(\frac{5\pi}{6}, -6.25\right)$$

$$\max\left(\frac{3\pi}{2}, -4\right), \min(2\pi, -6)$$



(3)

7. מתוך בגרות קיץ 2011 מועד ב'

נתונה הפונקציה $f(x) = \cos 2x + 2 \sin x + a$ בתחום $0 \leq x \leq \pi$.

בנקודה על גרף הפונקציה שבה $x = \frac{\pi}{6}$ העבירו משיק לגרף הפונקציה.

א. מצא את שיפוע המשיק.

ב. הישר $y = 2x + 1$ חותך את המשיק שאת שיפועו מצאת בנקודה שבה $x =$

$\frac{1}{4}$. מצא את משוואת המשיק.

ג. מצא את הערך של a .

הצב $a = 0$ וענה על הסעיפים ב-ד.

ד. בתחום הנתון מצא את נקודות הקיצון המוחלט של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ה. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה בתחום הנתון.

ו. הראה כי הישר $y = 2x + 1$ משיק לגרף הפונקציה בנקודת החיתוך שלה עם

ציר ה- x .

(א) נמצא את המשיק ב- $x = \frac{\pi}{6}$.

$$f'(x) = -2 \sin(2x) + 2 \cos(x)$$

$$f'(\frac{\pi}{6}) = -2 \sin(\frac{\pi}{3}) + 2 \cos(\frac{\pi}{6}) = m$$

$$m = 0$$

(ב) ב- $x = \frac{1}{4}$ הישר $y = 2x + 1$ חותך את המשיק בנקודה החיתוך.

$$y(\frac{1}{4}) = 2 \cdot \frac{1}{4} + 1 = \frac{3}{2}$$

$(\frac{1}{4}, \frac{3}{2})$

שיעור המשיק הוא 0, ולכן הוא נהיטות $y = k$.
 $\frac{3}{2} = k$ לבחון שלם ה- y בק' החיתוך בין 2 הישרים

$$y = \frac{3}{2}$$

הינה $\frac{3}{2}$ -
הערך של הפונקציה

$$\left(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}\right)$$

נקודה זו היא נקודה קיצונית

$$f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{3}{2}$$

$$\frac{3}{2} = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 2\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) + a$$

$$\frac{3}{2} = \frac{1}{2} + 1 + a$$

$$a = 0$$

$$\rightarrow \sin(2x) = 2\cos(x)\sin(x)$$

$$f'(x) = -2\sin(2x) + 2\cos(x) \quad (3)$$

$$f'(x) = -4\sin(x)\cos(x) + 2\cos(x)$$

$$f'(x) = -2\cos(x)(2\sin(x) - 1)$$

$$0 = -2\cos(x)(2\sin(x) - 1)$$

$$\cos(x) = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + \pi k$$

$$2\sin(x) = 1$$

$$\sin(x) = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$$

$$x_3 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$$

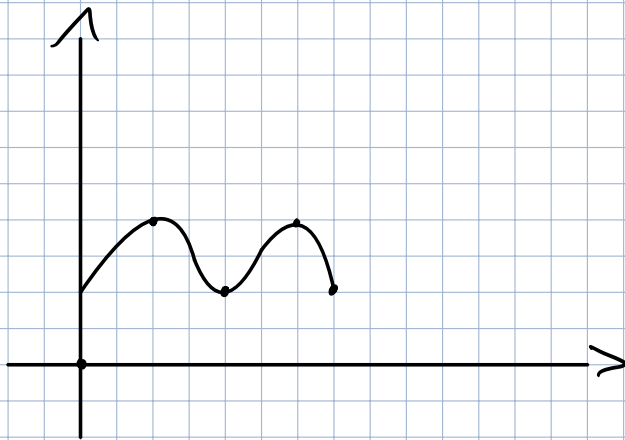
k	x_1	x_2	x_3
-1	x	x	x
0	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{6}$
1	x	x	x

x	0	$\frac{\pi}{8}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{5\pi}{6}$	$\frac{11\pi}{12}$	π
$f(x)$		+	0	-	0	+	0	-	
$f'(x)$	$\frac{m}{n}$	\nearrow	$\frac{m}{n}$ x	\searrow	$\frac{m}{n}$	\nearrow	$\frac{m}{n}$ x	\searrow	$\frac{m}{n}$

$$f'(\frac{\pi}{8}) = 0.4, f'(\frac{\pi}{3}) = -0.73, f'(\frac{2\pi}{3}) = 0.73, f'(\frac{11\pi}{12}) = -0.93$$

$$f(0) = 0, f(\frac{\pi}{6}) = \frac{3}{2}, f(\frac{\pi}{2}) = 1, f(\frac{5\pi}{6}) = \frac{3}{2}, f(\pi) = 1$$

$$\min(0, 1), \max(\frac{\pi}{6}, \frac{3}{2}), \min(\frac{\pi}{2}, 1), \max(\frac{5\pi}{6}, \frac{3}{2}), \min(\pi, 1)$$



(2)

(1) ב'ים כגון $x=0$ ונראה מה הש'ים.

$$f'(0) = -2 \cdot \cos(0) (2\sin(0) - 1) = 2 = m$$

ובאופן כללי.

בנוסף זה נמצא בקו $(0, 1)$ וזוהי נקודת המינימום של $f(x)$ על y וזוהי נקודת המינימום של $f(x)$ על y .