יש להקיף חזית ושני צדדיה של חלקת דשא בגדר. שטח חלקת הדשא הוא 50 מ״ר.

מצא את צלעות החלקה שעבורה אורך הגדר הוא מינימלי.

על מנת לפתור שאלה צריך נגדיר ב x,y את אורכי צלעות החלקה (כפי שמסומן בשרטוט) לפי נתוני השאלה $x \cdot y = 50$ כאשר $y = \frac{50}{x}$, כעת נגדיר את פונ' המטרה שהיא פונ' של סכום שתי צלעות צד וצלע תחתית אחת

$$f(x) = 2x + y = 2x + \frac{50}{x}$$

על מנת למצוא את צלעות החלקה שעבורן אורך הגדר יהיה מינימלי נגזור את פונ' המטרה נשווה ל-0 ונחפש ערכי מינימום.

$$f'(x) = 2 - \frac{50}{x^2}$$

$$2 - \frac{50}{x^2} = 0 \Rightarrow 2x^2 = 50$$

$$x^2 = 25$$

$$x = \pm 5$$

אך מכיוון שאורך צלע הוא רק חיובי נבחר ב $x = 5m$

נבדוק שאכן $x=5$ הוא ערך קיצון מינימלי

x	$0 < x < 5$	5	$5 < x$
$f'(x)$	$-$	0	$+$
$f(x)$	↘	min	↗

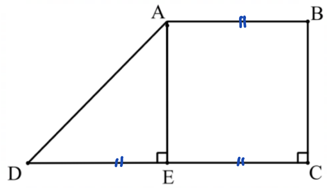
$x=5$ אכן ערך מינימלי לכן $y = \frac{50}{x} = 10m$

תשובה סופית: אורכי צלעות הגדר הם $5m$ וצלע התחתית $10m$

שטח טרפז ישר זווית $ABCD$ הוא 36 סמ"ר ($DC \perp BC$, $DC||AB$). AE הוא גובה החוצה את הבסיס DC לשני חלקים שווים.

א. מצא מה צריך להיות אורך הבסיס BC כדי שהיקף המלבן $ABCE$ יהיה מינימלי.

ב. מצא את היקף המלבן המינימלי.



לפי נתוני השאלה נגדיר את צלעות DE, EC, AB שוות ל-x ואת צלע $BC=y$

לפי נתוני השאלה שטח הטרפז הוא $36cm^2$ כלומר

(סכום הבסיסים כפול הגובה חלקי 2) $\frac{(2x+x)\cdot y}{2}=36$

נבודד את y ונקבל $y=\frac{72}{3x}=\frac{24}{x}$

כעת ניתן לרשום את פונ' המטרה שלנו - פונ' המתארת את היקף מלבן ABEC

$$P(x)=2x+2\cdot\frac{24}{x}$$

על מנת למצוא את ההיקף המינימלי נגזור את פונ' המטרה, נשווה ל-0 ונחפש ערכי מינימום.

$$P'(x)=2+2\cdot\frac{-24}{x^2}$$

$$2-\frac{48}{x^2}=0 \Rightarrow 2x^2=48 \quad /:2$$

$$x^2=24$$

$$x=\pm 2\sqrt{6}$$

מכיוון שאורכי צלעות הם גדלים חיוביים נבחר ב $x=2\sqrt{6}$

נוודא אכן שהוא נק' מינימום

x	$0<x<2\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}$	$2\sqrt{6}<x$
$P'(x)$	$-$	0	$+$
$P(x)$	↘	min	↗

$x=2\sqrt{6}$ אכן נק' מינימום

לכן: $BC=y=\frac{24}{x}=2\sqrt{6}$

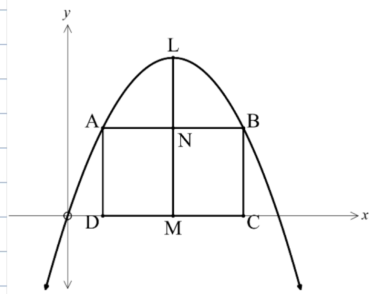
תשובה סופית: $BC=2\sqrt{6}\,cm$

ב. גילינו שהמלבן ABEC הוא למעשה ריבוע ולכן היקפו המינימלי יתקבל כשנכפול את אורך הצלע המינימלי כלומר היקפו יהיה: $8\sqrt{6}$

מתוך בגרות קיץ 1990

LM הוא ציר הסימטריה של הפרבולה $y=-x^2+6x$. בוחרים נקודה N על LM ודרכה מעבירים ישר המקביל לציר ה-x וחותך את הפרבולה בנקודות A ו-B. מהנקודות האלו, מורידים אנכים לציר ה-x, כך שנוצא מלבן $ABCD$.

מצא את שטחו המקסימלי של המלבן הנבנה בדרך זו.



ציר הסימטריה עובר בנק' המקסימום של הפרבולה (L) היכן שהנגזרת מתאפסת

כלומר ב $y'=-2x+6=0 \Rightarrow x=3$

נגדיר את ערך ה-x של נק' B $x_B=t$ לכן שיעורי הנק' B: $(t,-t^2+6t)$

מכאן ניתן להסיק כי אורך קטע BN הינו $t-3$.

משיקולי סימטריה כיוון שהפונ' זוגית וסימטרית ביחס ל- $x=3$ אנו יכולים לטעון ששטחי המלבנים MNBC ו DAMN שווים (המרחק של A מציר הסימטריה שווה למרחק של B מאותו הציר, כי AB מאונכת לציר ה-y ולכן לנק' אותם ערכי y).

נרשום את פונ' המטרה שלנו - ביטוי לשטח מלבן MNBC שאותו נכפול פי 2:

$$S(t)=2\cdot(t-3)(-t^2+6t)=2(-t^3+9t^2-18t)$$

נמצא ערכי קיצון:

$$S'(t)=2(-3t^2+18t-18)=0$$

$$t_{1,2}=\frac{-18\pm\sqrt{(18)^2-4(-3)\cdot(-18)}}{-6}=\frac{-18\pm6\sqrt{3}}{-6}\begin{cases}t_1=3-\sqrt{3}\\ t_2=3+\sqrt{3}\end{cases}$$

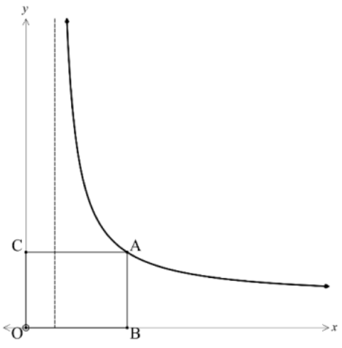
שני הערכים חיוביים לכן נציב בטבלת ערכים בשביל לקבוע מיהו ערך הקיצון המקסימלי :

t	$0<t<3-\sqrt{3}$	$3-\sqrt{3}$	$3-\sqrt{3}<t<3+\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}$	$3\sqrt{3}<t$
$S'(t)$	$-$	0	$+$	0	$-$
$S(t)$	$\searrow$	min	$\nearrow$	max	$\searrow$

לכן עבור $x=3+\sqrt{3}$ מתקבל שטח מלבן מקסימלי, נציב ערך זה בפונ' המטרה ונקבל:

$$S(3+\sqrt{3})= 2\cdot\left(-(3+\sqrt{3})^3+9\cdot(3+\sqrt{3})^2-18\cdot 3\sqrt{3}\right)=12\sqrt{3}$$

שטח המלבן המקסימלי הינו $12\sqrt{3}$ יח"ר



מתוך בגרות קיץ 2002

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{x+3}{x-1}$, $x > 1$.

מנקודה A שעל גרף הפונקציה הורידו אנכים לציר ה-x

וה-y ונוצר מלבן $ABCO$.

מה צריכים להיות שיעורי הנקודה A כדי שהיקף המלבן

יהיה מינמלי?

נגדיר ערך $x=t$ עבור נק' A שנמצאת על גרף הפונ' ולכן שיעורי נק' A

הם: $\left(t, \frac{t+3}{t-1}\right)$, מכיוון ש A הוא הקודקוד הימני עליון של המלבן ושאר

הקודקודים נמצאים על צירים אנו מסוגלים לדעת מה אורך כל צלע:

$AC = OB = t$

$OC = AB = \frac{t+3}{t-1}$

כעת אנו מסוגלים לרשום את פונ' המטרה שלנו שהיא היקף המלבן!:

$$P(t) = 2t + \frac{2t+6}{t-1}$$

נמצא ערכי קיצון:

$$P'(t) = 2 + \frac{2(t-1)-(2t+6)}{(t-1)^2}$$

$$2 + \frac{-8}{(t-1)^2} = 0 \Rightarrow 2(t-1)^2 = 8$$

$$2t^2 - 4t - 6 = 0 \quad /:2 \quad \Rightarrow \quad t^2 - 2t - 3 = 0$$

$$t_{1,2} = \frac{2 \pm \sqrt{4+12}}{2} \quad \begin{matrix} \nearrow t_1 = 3 \\ \searrow t_2 = -1 \end{matrix}$$

תחום ההגדרה $x>1$ לכן נפסל

כעת עלינו לוודא כי $t=3$ נק' מינימום

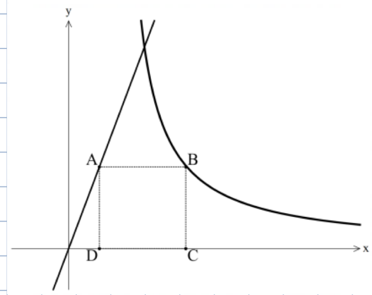
t	$1<t<3$	3	$3<t$
$p'(t)$	$-$	0	$+$
$p(t)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

נמצא את שיעורי נק׳ A

$$f(3)=\frac{3+3}{3-1}=3$$

לכן עבור $A(3,3)$ היקף המלבן מינימלי

מהנקודה A הנמצאת על הישר $y=2x$ מורידים אנך לציר ה-x. גם מהנקודה B, הנמצאת על גרף הפונקציה $f(x)=\frac{8}{x-2}$ מורידים אנך לציר ה-x. הקטע AB מקביל לציר ה-x. מצא את ערכי הנקודות A ו-B שעבורם שטח המרובע $ABCD$ מקסימלי.



שיעורי נק' A הינם: $(t,2t)$, שיעורי נק' B: $\left(k,\frac{8}{k-2}\right)$

מכיוון שקטע AB מקביל לציר ה-x אז מסיקים כי ערכי ה-y של נק' A ו-B שווים כלומר

$$\frac{8}{k-2}=2t \Rightarrow t=\frac{4}{k-2}$$

כלומר שיעורי נק' A בפרמטר k הינם $\left(\frac{4}{k-2},\frac{8}{k-2}\right)$

כעת אנו מסוגלים לגלות את אורכי כל הצלעות:

$$AB=DC=k-\frac{4}{k-2}$$

$$AD=BC=\frac{8}{k-2}$$

לכן פונק' המטרה שלנו הינה שטח המרובע ABCD:

$$S(k)=\frac{8}{k-2}\cdot\left(k-\frac{4}{k-2}\right)=\frac{8k}{k-2}-\frac{32}{(k-2)^2}$$

נמצא ערכי קיצון:

$$S'(k)=\frac{-16k+96}{(k-2)^3}$$

$$-16k+96=0 \Rightarrow k=6$$

נבדוק שאכן $k=6$ ערך קיצון:

k	$0<k<6$	6	$6<k$
$S'(k)$	+	0	−
$S(k)$	↗	max	↘

נמצא את שיעורי נק' B ו-A

B:

$$\left(6, \frac{8}{6-2}\right) = (6,2)$$

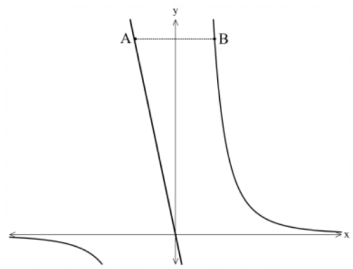
A

$$\left(\frac{4}{6-2}, \frac{8}{6-2}\right) = (1,2)$$

לכן עבור $B=(6,2)$, $A=(1,2)$ שטח המרובע מקסימלי

ישר המקביל לציר ה-x חותך את גרף הפונקציה $y=\frac{32}{x^3}$ בנקודה B ואת הישר $y=-6x$ בנקודה A. הנקודה B נמצאת ברביע הראשון והנקודה A ברביע השני.

נסמן: $X_A=t_0$, $X_B=t$.



א. הבע את t_0 באמצעות t

ב. מצא את שיעורי הנקודה B שעבורה אורך הקטע AB מינמלי ומצא את האורך המינמלי.

א. מכיוון שישר AB מקביל לציר x ערך ה y של נק' A ו-B שווה, לכן

ערך ה y של נק' B הוא $y=\frac{32}{t^3}$

נשווה עם ערך ה y של נק' A שהוא $-6t_0$

$$-6t_0=\frac{32}{t^3}$$

$$t_0=\frac{-16}{3t^3}$$

ב. אורך קטע AB הוא חיבור שיעורי ה-x של נק' A ו-B לכן

כיון המטרה שלנו היא פונ' סכום של שיעורי הנקודות:

$$f(t)=t-\left(\frac{-16}{3t^3}\right)=t+\frac{16}{3t^3}$$

נמצא ערכי קיצון:

$$f'(t)=1-\frac{16\cdot 9t^2}{9t^6}=1-\frac{16t^2}{t^6}$$

$$1-\frac{16t^2}{t^6}=0 \quad /\cdot t^6 \qquad t^6-16t^2=0$$

$$t^2(t^4-16)=0$$

קיבלנו שהפתרונות למשוואה הם $t_1=0$, $t_2=2$ $t_3=-2$ אך מכיוון שנק'

B נמצאת ברביע הראשון נבחר $t=2$, נוודא שזה אכן ערך מינימום

t	$0<t<2$	2	$2<t$
$f'(t)$	$-$	0	$+$
$f(t)$	$\searrow$	min	$\nearrow$

אכן $t=2$ הוא הערך עבורו אורך AB מינימלי, נציב ערך זה בפונ' המטרה

$$f(2) = 2 + \frac{16}{3\cdot 2^3} = 2\frac{2}{3}$$