פירוק לגורמים

פירוק לגורמים של ביטוי הוא הצגתו כמפלה של גורמים. ישנם שלושה סוגים של פירוק לגורמים :

1. הוצאת גורם משותף – מציאת גורם בו מתחלקים מספר איברים בביטוי
2. נוסחאות הכפל המקוצר
3. פירוק לגורמים בעזרת טרינום

הוצאת גורם משותף

גורם משותף של ביטוי הוא כל מספר בו איברי הביטוי, מתחלקים ללא שארית. לדוגמה, 3 הוא גורם של 15, כיוון ש-15 מתחלק ב-3 ללא שארית. בדרך כלל, כאשר נבצע הוצאת גורם משותף לביטוי ונכנס את הביטוי, נוציא את הגורם המשותף הגדול ביותר האפשרי.

לדוגמא : בביטוי $8x + 12$ הביטוי $8x$ וגם המספר 12 מתחלקים ב-**4**, ולכן 4 הוא הגורם המשותף לכל איברי הביטוי. $8x + 12 = 4 \cdot (2x + 3)$.

מבוא לאלגברה פירוק לגורמים

שאלות – הוצאת גורם משותף

הוצא את הגורם המשותף שערכו הוא הגדול ביותר

1. $4x + 16$
2. $10 - 4a$
3. $8xy - 48x$
4. $6 + 24a - 18b$
5. $12a^2 + 20a + 36ab$
6. $-2x - 10$
7. $-3 + 12a$
8. $7b - 21a$
9. $6a - 30ab$
10. $-2 + 42x - 6b$
11. $10xy - 15y - 20x$
12. $2x^2 + x$
13. $5x + 2x^3$
14. $6b^2 + 2b^3$
15. $y^3x^4 - y^5x^3$
16. $2c^3 + c^6 + c^2$
17. $6x^5 + 9x^3 + 12x^6$
18. $ay^2 + 3aby^3$

תשובות – הוצאת גורם משותף

1	$4(x+4)$	7	$3(-1+4a)$	13	$x(5+2x^2)$
2	$2(5-2a)$	8	7(b-3a)	14	$2b^2(3+b)$
3	$8x(y-6)$	9	$6a(1-5b)$	15	$y^3x^3(x-y^2)$
4	$6(1+4a-3b)$	10	$-2(1-21x+3b)$	16	$c^2(2c+c^4+1)$
5	$4a(3a+5+9b)$	11	$5(2xy-3y-4x)$	17	$3x^3(2x^2+3+4x^3)$
6	$-2(x+5)$	12	$x(2x+1)$	18	$ay^2(1+3by)$

נוסחאות כפל מקוצר

סוגריים כפולים

כאשר ניתקל במכפלה של סוגריים בסוגריים נכפול כל אחד מהאיברים שבסוגריים בכל אחד מהאיברים שבסוגריים השניים ונחבר בין המכפלות, באופן הבא:

$$(a+b)\cdot(c+d)=a\cdot c+a\cdot d+b\cdot c+b\cdot d$$

יש לשים לב אם המספרים חיוביים או שליליים ולהקפיד להתייחס לסימנים במכפלות בהתאם לחוקי הכפל של מספרים חיוביים ושליליים. נוסחאות הכפל המקוצר, מאפשרות לנו לפתוח סוגריים בצורה מהירה יותר אך עם זאת, נגיע לאותה תשובה שהיינו מגיעים אליה במידה והיינו מבצעים כפל בין סוגריים.

נוסחה מס׳ 1: $(a+b)^2=a^2+2ab+b^2$

נוסחה מס׳ 2: $(a-b)^2=a^2-2ab+b^2$

נוסחה מס׳ 3: $(a+b)\cdot(a-b)=a^2-b^2$

בעזרת הכפל המקוצר נוכל גם להכניס ביטויים לתוך סוגריים ובכך לבצע פירוק לגורמים וכינוס איברים. כאשר נזהה את אחת מתבניות הכפל המקוצר עליהן דיברנו מקודם נוכל להחזיר את התבנית לתוך הסוגריים. תבנית זו ניתנת לזיהוי, במידה ויהיו שני איברים שהם ריבועיהם של ביטויים אחרים. במקרה כזה ננסה לזהות אם הביטוי מקיים את אחת מנוסחאות הכפל המקוצר.

דוגמה:

נניח ונתבקשנו לכנס את הביטוי $x^2+8x+16$. נתייחס לשני איברים בריבוע – x^2 והאיבר החופשי (שלא מוכפל בנעלם) -16. אם כך, שני הגורמים שהועלו בריבוע הם x ו-4. הנעלם שלא מועלה בריבוע הוא בעל קידומת חיובית ולכן אבחן האם הביטוי הבא, $x^2+8x+16$ שווה ל-$(x+4)^2$.

$$\mathbf{x^2+8x+16=(x+4)^2=x^2+8x+16}$$

כלומר, נוכל לכנס את הביטוי הנ״ל באמצעות נוסחת הכפל המקוצר.

מבוא לאלגברה פירוק לגורמים

שאלות – נוסחאות הכפל המקוצר

פתחו את הסוגריים הבאים וכנסו איברים כשמתאפשר:

.1 $(x+5)\cdot(x+4)$

.2 $(x+2)\cdot(x+10)$

.3 $(x+1)\cdot(x-5)$

.4 $(2x-3)\cdot(x-6)$

.5 $(3-\mathrm{a})\cdot(\mathrm{a}+4)$

.6 $(3-\mathrm{y})\cdot(\mathrm{y}-3)$

.7 $(3\mathrm{x}-1)\cdot(2\mathrm{x}+5)$

.8 $(\mathrm{a}+\mathrm{b})\cdot(\mathrm{a}+2)$

פתחו את הסוגריים בתרגילים הבאים בעזרת נוסחאות הכפל המקוצר המתאימות:

.9 $(2\mathrm{x}+3)^2$

.10 $(3\mathrm{x}-5)^2$

.11 $(2\mathrm{a}+2\mathrm{b})^2$

.12 $(2\mathrm{a}+9)\cdot(2\mathrm{a}-9)$

.13 $(7-3\mathrm{r})^2$

.14 $(10+2\mathrm{y})\cdot(10-2\mathrm{y})$

.15 $(2\mathrm{x}+3\mathrm{y})^2$

.16 $(\mathrm{a}+4\mathrm{b})\cdot(\mathrm{a}-4\mathrm{b})$

בתרגילים הבאים השלימו את הסימנים החסרים (+ או −) בריבועים האפורים

בהתאם לנוסחאות הכפל המקוצר:

.17 $\mathrm{x}^2\square12\mathrm{x}\square36=(\mathrm{x}+6)^2$

.18 $\mathrm{x}^2-81=(\mathrm{x}\square9)\cdot(\mathrm{x}\square9)$

.19 $9\mathrm{m}^2\square30\mathrm{m}\square25=(3\mathrm{m}+5)^2$

.20 $(\mathrm{n}-1)^2=\mathrm{n}^2\square2\mathrm{n}\square1$

.21 $(\mathrm{s}+\mathrm{r})\cdot(\mathrm{s}-\mathrm{r})=\mathrm{s}^2\square\mathrm{r}^2$

.22 $(2\mathrm{n}\square3)^2=4\mathrm{n}^2+12\mathrm{n}\square9$

מבוא לאלגברה פירוק לגורמים

בתרגילים הבאים השלימו את האברים החסרים בריבועים האפורים בהתאם לנוסחאת הכפל המקוצר:

.23 $x^2 + 20x + 100 = (x + \square)^2$

.24 $x^2 - 14x + \square = (x - \square)^2$

.25 $(x - 8)^2 = x^2 - \square + 64$

.26 $(m + \square) \cdot (\square - r) = m^2 - r^2$

.27 $(\square + p)^2 = s^2 + \square + \square$

.28 $(x + \square)^2 = x^2 + \square + 4y^2$

כנסו את הביטויים הבאים לסוגריים בהתאם לנוסחאות הכפל המקוצר:

.29 $x^2 - 10x + 25$

.30 $x^2 + 20x + 100$

.31 $a^2 - 64$

.32 $49 + 14x + x^2$

.33 $4r^2 - 9$

.34 $16x^2 + 40x + 25$

.35 $m^2 + 2mn + n^2$

.36 $36 - 24x + 4x^2$

.37 $16x^2 - 9y^2$

.38 $25x^2 - 30xy + 9y^2$

.39 $x^2 - 4y^2$

.40 $9n^2 + 24mn + 16m^2$

מבוא לאלגברה פירוק לגורמים

תשובות

1	$x^2 + 9x + 20$	**15**	$4x^2 + 12xy + 9y^2$	**29**	$(x-5)^2$
2	$x^2 + 12x + 20$	**16**	$a^2 - 16b^2$	**30**	$(x+10)^2$
3	$x^2 - 4x - 5$	**17**	$x^2+12x+36$	**31**	$(a+8)\cdot(a-8)$
4	$2x^2 - 15x + 18$	**18**	$(x+9)\cdot(x-9)$	**32**	$(7+x)^2$
5	$-a^2 - a + 12$	**19**	$9m^2+30m+25$	**33**	$(2r+3)\cdot(2r-3)$
6	$-y^2 + 6y - 9$	**20**	$n^2 - 2n + 1$	**34**	$(4x+5)^2$
7	$6x^2 + 13x - 5$	**21**	$s^2 - r^2$	**35**	$(m+n)^2$
8	$a^2 + 2a + ab + 2b$	**22**	$(2n+3)^2 = 4n^2 + 12n + 9$	**36**	$(6-2x)^2$
9	$4x^2 + 12x + 9$	**23**	$(x+10)^2$	**37**	$(4x+3y)\cdot(4x-3y)$
10	$9x^2 - 30x + 25$	**24**	$x^2 - 14x + 49 = (x-7)^2$	**38**	$(5x-3y)^2$
11	$4a^2 + 8ab + 4b^2$	**25**	$x^2 - 16x + 64$	**39**	$(x+2y)\cdot(x-2y)$
12	$4a^2 - 81$	**26**	$(m+r)\cdot(m-r)$	**40**	$(3n+4m)^2$
13	$49 - 42r + 9r^2$	**27**	$(s+p)^2 = s^2 + 2sp + p^2$		
14	$100 - 4y^2$	**28**	$(x+2y)^2 = x^2 + 4xy + 4y^2$		

טרינום

טרינום ריבועי הינו תלת איבר מהצורה: $ax^2+bx+c \quad (a\neq0)$. פירוק לאיברי הטרינום הוא כלי מהיר ויעיל לפתרון משוואות ריבועיות, ללא צורך בנוסחת שורשים.

בעת פעולת הפירוק אנו מחפשים איברים אשר תוצאת מכפלתם היא הטרינום הנתון.

ניתן למצוא את שורשי המשוואה, כלומר מאפסי המשוואה, בעזרת 5 צעדים פשוטים:

לדוגמא: מצא את שורשי המשוואה הבאה, $2x^2-5x-12$.

שלב מס׳ 1: נזהה את איברי הטרינום, a, b ו-c

$$a=2, \quad b=-5, \quad c=-12$$

שלב מס׳ 2: נרשום את תוצאת המכפלה $a\cdot c$

$$a\cdot c = 2\cdot(-12) = -24$$

שלב מס׳ 3: נרשום את כל זוגות המספרים שתוצאת המכפלה שווה ל- $a\cdot c$:

$$(2,-12), (-2,12), (4,-6), (-4,6), (3,-8), (-3,8), (1,-24), (-1,24)$$

שלב מס׳ 4: נבחר מבין הזוגות המספרים שרשמנו בשלב 3, את הזוג שסכומו ייתן את b.

$$b=-5$$

לכן, הזוג המתאים הוא:

$$(3,-8):\ 3+(-8)=5$$

שלב מס׳ 5: נפרק את האיבר האמצעי במשוואה לפי הזוג הנבחר, ונפתור את המשוואה בעזרת פירוק לגורמים.

$$2x^2-\mathbf{5x}-12=0$$

$$2x^2-\mathbf{8x}+\mathbf{3x}-12=0$$

$$2x(x-4)+3(x-4)=0$$

$$(x-4)\cdot(2x+3)=0$$

פתרון:

$$x_1=4,\ x_2=-\frac{3}{2}$$

מבוא לאלגברה פירוק לגורמים

שאלות - טרינום

1. $x^2 + 8x + 15$
2. $2x^2 + 11x + 14$
3. $3x^2 - 2x - 8$
4. $2x^2 + 9x - 18$
5. $2x^2 + 11x + 5$
6. $4x^2 + 17x + 15$

תשובות

1	$(x+3) \cdot (x+5)$	3	$(3x+4) \cdot (x-2)$	5	$(2x+1) \cdot (x+5)$
2	$(x+2) \cdot (2x+7)$	4	$(2x-3) \cdot (x+6)$	6	$(4x+5) \cdot (x+3)$

שברים עם ביטויים

שבר הוא מספר, המוצג כחילוק של מספר שלם אחד במספר שלם שני ששונה מ-0. בספר היסודות למדנו את הטכניקות הבסיסיות לפעולות חשבון עם שברים. לעיתים נתבקש לבצע פעולות חשבון בין שברים-המכילים ביטויים עם נעלמים או פרמטרים לבין שברים אחרים עם ביטויים, מספרים שלמים או שברים רגילים. בחלק זה נלמד כיצד לבצע פעולות אלה ולקבל ביטוי "מכונס" יותר, אשר קל יותר לעבוד איתו.

ראשית נתעסק בשיטות להרחבות ולצמצום שברים:

בדומה להרחבת שברים שאינם מכילים ביטויים או נעלמים, כאשר נרחיב שבר במספר ו/או בפרמטר, עלינו לכפול את כל מרכיבי המונה ואת כל מרכיבי המכנה במספר ו/או בפרמטר בו אנו מרחיבים על מנת לייצר **"מכנה משותף" -** כפל של מרכיבי המונה והמכנה במספר זהה אשר לא ישנה את ערך הביטוי.

דוגמאות:

- נניח שנרצה להרחיב את השבר $\frac{x+1}{2}$ כך שהמכנה של הביטוי יהיה 6. לשם כך נרחיב את השבר ב-3 באופן הבא:

$$\frac{x+1}{2}=\frac{3\cdot(x+1)}{3*2}=\frac{3x+3}{6}$$

- נניח שנרצה להרחיב את השבר $\frac{5}{2x+1}$ כך שהמונה של הביטוי יהיה 10, לשם כך נרחיב את השבר ב-2 באופן הבא:

$$\frac{5}{2x+1}=\frac{2*5}{2*(2x+1)}=\frac{10}{4x+2}$$

- נניח שנרצה להרחיב את השבר $\frac{2-x}{7}$ ב-a, לשם כך, נכפול את המונה והמכנה ב-a באופן הבא:

$$\frac{2-x}{7}=\frac{a\cdot(2-x)}{a\cdot7}=\frac{2a-ax}{7a}$$

ניתן לצמצם שברים באמצעות **הוצאת גורם משותף.**

מבוא לאלגברה שברים

בצמצום שברים נוכל לצמצם רק אם יש כפל במכנה ו/או במונה ולא נוכל לצמצם אם יש חיבור או חיסור במכנה או במונה. יש להבין שכאשר יש לנו ביטוי בתוך סוגריים, כל הביטוי הזה הוא בעצם "מספר" אחד.

טכניקת הוצאת הגורמים המשותפים תסייע לנו בצמצומי השברים. למשל, את השבר הבא $\frac{3a+b}{3}$, לא ניתן לצמצם. מכיוון שהמספר "3" הוא מקדם של a בלבד. לעומת זאת, $\frac{3a+3b}{3}$, אשר בו ניתן להוציא גורם משותף במונה: $\frac{3(a+b)}{3}$, מכיוון שבביטוי זה קיימת מכפלה בין איברי המונה ניתן לצמצם את הביטוי והוא יהיה שווה ל-$a+b$.

לפעמים ניתקל בביטויים בהם גם במונה וגם במכנה מופיעה אותה פעולת חיסור, כאשר שני האיברים יהיו אותם איברים אך בסדר הפוך. במקרה כזה נוכל להוציא גורם משותף (-1) מחוץ לסוגריים מאחד הגורמים ונקבל ביטויים זהים אשר נוכל לצמצם ביניהם.

למשל, צמצום השבר הבא: $\frac{x-5}{5-x}$. נוציא מהמונה גורם משותף (-1) ונקבל את הביטוי הבא: $\frac{-1(-x+5)}{5-x}=\frac{-1\cancel{(5-x)}}{\cancel{5-x}}=-1$

בנוסף, נוכל להיעזר בנוסחאות הכפל המקוצר. נניח שנתבקשנו לפשט את הביטוי הבא: $\frac{x^2+8x+16}{x+4}$. נוכל לזהות את נוסחת הכפל המקוצר במונה כך, $(x+4)^2=x^2+8x+16$.

בעזרת הנוסחה נפשט את הביטוי באופן הבא:

$$\frac{x^2+8x+16}{x+4}=\frac{(x+4)^2}{x+4}=\frac{(x+4)\cdot\cancel{(x+4)}}{\cancel{(x+4)}}=\frac{(x+4)}{1}=x+4$$

מכיוון שחלוקה ב-0 היא פעולה "אסורה" עליה נרחיב בנושא "תחום הגדרה" במידה ונצמצם שבר בפרמטר או נעלם, עלינו לדעת בוודאות שאותו נעלם/פרמטר שונה מ-0. **לכן, <u>תמיד</u> שנצמצם בנעלם/פרמטר/בביטוי עלינו לציין שאותו גורם שונה מאפס.**

מבוא לאלגברה שברים

שאלות

הרחיבו את השברים הבאים כך שהמכנה יהיה 36:

.1 $\frac{2x+3}{12}$

.2 $\frac{a+b}{6}$

.3 $\frac{x-5}{18}$

.4 $\frac{2a-b+1}{3}$

הרחיבו את השברים הבאים כך שהמונה יהיה 30:

.5 $\frac{15}{x-4}$

.6 $\frac{3}{1-2x}$

.7 $\frac{10}{2x-y}$

.8 $\frac{6}{a+2b-3}$

הרחיבו את השברים הבאים בפרמטר a:

.9 $\frac{x}{3}$

.10 $\frac{2}{4+5x}$

.11 $\frac{x}{x-6}$

.12 $\frac{b+1}{1-2c}$

השברים הבאים הורחבו, אך המונה או המכנה חסרים בשברים המורחבים, השלימו את החלק החסרים:

.13 $\frac{5}{x-6}=\frac{15}{}$

.14 $\frac{7x+2}{9}=\frac{}{27}$

.15 $\frac{11}{x+y}=\frac{110}{}$

.16 $\frac{3x+1}{2}=\frac{}{2a}$

.17 $\frac{3}{a+2}=\frac{}{6a+12}$

.18 $\frac{2}{3}=\frac{2x+2}{}$

.19 $\frac{2a-5}{a+3}=\frac{}{3a+9}$

.20 $\frac{8-x}{8+x}=\frac{}{8y+xy}$

מבוא לאלגברה שברים

צמצמו את התרגילים הבאים באמצעות הוצאת גורם משותף:

הנח כי כל הביטויים הניתנים לצמצום שונים מ-0.

21. $\frac{5x+15}{5}$

22. $\frac{2}{6a+18}$

23. $\frac{2a}{3a^2-a}$

24. $\frac{b-2}{3b-6}$

25. $\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y}$

26. $\frac{21}{42-7x}$

27. $\frac{3a^2b}{6ab}$

28. $\frac{4-2x}{x-2}$

29. $\frac{2x-3}{9-6x}$

30. $\frac{3-3b}{4b-4}$

31. $\frac{2-b}{3b-6}$

32. $\frac{x-y}{y-x}$

33. $\frac{5y-2xy}{15-6x}$

34. $\frac{2xy^2+4xy}{5x^2y+10xy}$

35. $\frac{x^2+8x}{x+8}$

36. $\frac{a^2-7a}{a-7}$

37. $\frac{a-2}{3a^4-6a^3}$

38. $\frac{x^2-49}{x-7}$

39. $\frac{ax^3-5x^3}{3ab^2-15b^2}$

40. $\frac{x^2-5x}{5-x}$

41. $\frac{10ab-ab^2}{b-10}$

42. $\frac{64-48m+9m^2}{(8-3m)^2}$

43. $\frac{2ab-5b}{20-8a}$

44. $\frac{x^2-10x+25}{x-5}$

45. $\frac{ab^2+ab^3}{b+1}$

46. $\frac{9a-6}{3ab-2b}$

47. $\frac{9n^2+30n+25}{3n+5}$

48. $\frac{2a-7b}{7b-2a}$

49. $\frac{9x^2+42xy+49y^2}{6x+14y}$

מבוא לאלגברה שברים

תשובות

1	$\frac{6x+9}{36}$	**18**	$\frac{2x+2}{3x+3}$	**35**	x
2	$\frac{2x-10}{36}$	**19**	$\frac{6a-15}{3a+9}$	**36**	a
3	$\frac{6a+6b}{36}$	**20**	$\frac{8y-xy}{8y+xy}$	**37**	$\frac{1}{3a^3}$
4	$\frac{24a-12b+12}{36}$	**21**	$x+3$	**38**	X+7
5	$\frac{30}{2x-8}$	**22**	$\frac{1}{3(a+3)}$	**39**	$\frac{x^3}{3b^2}$
6	$\frac{30}{10-20x}$	**23**	$\frac{2}{3a-1}$	**40**	$-x$
7	$\frac{30}{6x-3y}$	**24**	$\frac{1}{3}$	**41**	$-ab$
8	$\frac{30}{5a+10b-15}$	**25**	$x+y$	**42**	1
9	$\frac{xa}{3a}$	**26**	$\frac{3}{6-x}$	**43**	$-\frac{b}{4}$
10	$\frac{2a}{4a+5ax}$	**27**	$\frac{a}{2}$	**44**	$x-5$
11	$\frac{xa}{xa-6a}$	**28**	-2	**45**	ab^2
12	$\frac{ab+a}{a-2ac}$	**29**	$-\frac{1}{3}$	**46**	$\frac{3}{b}$
13	$\frac{15}{3x-18}$	**30**	$-\frac{3}{4}$	**47**	$3n+5$
14	$\frac{21x+6}{27}$	**31**	$-\frac{1}{3}$	**48**	-1
15	$\frac{110}{10x+10y}$	**32**	-1	**49**	$\frac{3x+7y}{2}$
16	$\frac{3ax+a}{2a}$	**33**	$\frac{y}{3}$		
17	$\frac{18}{6a+12}$	**34**	$\frac{2y+4}{5x+10}$		

מבוא לאלגברה חזקות ושורשים

חזקות

פעולת **החזקה** היא למעשה קיצור של פעולת הכפל. לפי סדר פעולות החשבון, פעולת החזקה קודמת לפעולות הכפל, החילוק, החיבור והחיסור **בתנאי שאין סוגריים**. אם a הוא מספר כלשהו, ו-b מספר טבעי, אז a בחזקת b מוגדר באופן הבא:

$$a^b = \underbrace{a \cdot a \cdot \ldots a}_{b \text{ פעמים}}$$

a נקרא בסיס החזקה

b נקרא מעריך החזקה.

ישנם מספר חוקים שעלינו להכיר אשר נובעים מההגדרה של חזקות ועשויים לסייע לנו בהמשך בפתירת תרגילים מורכבים יותר:

1. תוצאת המכפלה שתי חזקות <u>בעלות בסיס זהה</u>, תהיה חזקה שהבסיס שלה הוא הבסיס המשותף והמאריך שלה הוא סכום מאריכי החזקות שהכפלנו כלומר:

$$\mathbf{a^m \cdot a^n = a^{m+n}}$$

לדוגמה: $6^2 \cdot 6^3 = 6^{2+3} = 6^5$

<u>הסבר:</u> $\underbrace{a * a \ldots . a}_{x \text{ פעמים}} * \underbrace{a * a \ldots . a}_{y \text{ פעמים}} = a^{x+y}$

2. כאשר מחלקים שתי חזקות בעלות בסיס זהה התוצאה תהיה חזקה שהבסיס שלה הוא הבסיס המשותף והמאריך שלה הוא ההפרש בין המאריכים של החזקות שחילקנו כלומר:

$$\mathbf{\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}}$$

לדוגמה: $\frac{5^4}{5^3} = 5^{4-3} = 5^1$

<u>הסבר</u>: $\dfrac{\overbrace{a*a*a*....a}^{x\text{ פעמים}}}{\underbrace{a*a*....a}_{y\text{ פעמים}}} = a^{x-y}$

נבצע צמצום של הבסיס הזהה ולכן התוצאה תהיה חזקה שמעריכה הוא הפרש המעריכים

3. כאשר נעלה מכפלה של שני מספרים בחזקה מסוימת, פעולה זו תהיה שקולה להעלאה של כל אחד מן מגורמים במכפלה בנפרד כלומר:

$$(\mathbf{a}\cdot\mathbf{b})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a}^{\mathbf{n}}\cdot\mathbf{b}^{\mathbf{n}}$$

לדוגמה: $(a\cdot 7)^3 = a^3\cdot 7^3$

4. כאשר מבצעים פעולת חזקה על חזקה קיימת, נקבל חזקה שהבסיס שלה הוא הבסיס של החזקה המקורית והמאריך שלה הוא מכפלת מאריכים:

$$(\mathbf{a}^{\mathbf{m}})^{\mathbf{n}} = \mathbf{a}^{\mathbf{m}\cdot\mathbf{n}}$$

לדוגמה: $\left(2^3\right)^4 = 2^{3\cdot 4} = 2^{12}$

5. כאשר מעלים שבר כלשהו בחזקה מסוימת, פעולה זו שקולה להעלאה באותה החזקה את המונה והמכנה של השבר בנפרד:

$$\left(\frac{\mathbf{a}}{\mathbf{b}}\right)^{\mathbf{n}} = \frac{\mathbf{a}^{\mathbf{n}}}{\mathbf{b}^{\mathbf{n}}}$$

לדוגמה: $\left(\frac{2}{3}\right)^4 = \frac{2^4}{3^4}$

בעזרת חוקים אלו ניתן לשנות את בסיס החזקה למכפלות ידועות, להקטין או להגדיל את בסיס החזקה. כאשר בסיס החזקה הוא מספר שניתן לבטא כחזקה של בסיס קטן יותר, נוכל לרשום את החזקה כולה גם כחזקה של הבסיס הקטן.

למשל, $4^x = (2^2)^x = 2^{2x}$.

כמו כן, כאשר מאריך החזקה מכיל מספר ונעלם, ניתן להעלות את הבסיס בחזקת המספר ולהשאיר במאריך את הנעלם בלבד. למשל, $5^{2x} = \left(5^2\right)^x = 25^x$

מבוא לאלגברה חזקות ושורשים

שאלות

פתרו את התרגילים הבאים (כתבו את התוצאה כחזקות או כנסו על פי חוקי חזקות):

1. $3^9 \cdot 3^3$

2. $3^x \cdot 3^{4x}$

3. $\frac{7^{13}}{7^6}$

4. $\frac{8^x}{8^{x-6}}$

5. $2^x \cdot 2^{6-x}$

6. $\frac{7^x}{7^3}$

7. $\frac{5^{3x}}{5^x \cdot 5^6}$

8. $\frac{12^{13}}{12^3}$

9. $4^{3x} \cdot 4^{13-3x}$

10. $\frac{13^{2x} \cdot 13^6}{13^x \cdot 13^3}$

11. $(5x)^2$

12. $(x^2)^6$

13. $(\frac{1}{4})^3$

14. $\frac{(x+5)^4}{x+5}$

15. $\left(\frac{3x}{7}\right)^2$

16. $(5x^2y)^2$

17. $\left(\frac{x^5}{y}\right)^2$

18. $(x^x)^x$

19. $(4x^x)^y$

20. $\left(\frac{2}{x^5}\right)^3 \cdot \left(\frac{x^4}{2}\right)^4$

תשובות

1	3^{12}	**8**	12^{10}	**15**	$\frac{3^2x^2}{7^2}=\frac{9x^2}{49}$
2	3^{5x}	**9**	4^{13}	**16**	$5^2x^4y^2=25x^4y^2$
3	7^7	**10**	13^{x+3}	**17**	$\frac{x^{10}}{y^2}$
4	8^6	**11**	$5^2x^2=25x^2$	**18**	x^{x^2}
5	2^6	**12**	x^{12}	**19**	4^yx^{xy}
6	7^{x-3}	**13**	$\frac{1}{4^3}=\frac{1}{64}$	**20**	$\frac{x}{2}$
7	5^{2x-6}	**14**	$(x+5)^3$		

חזקות עם מאריך שלילי ומאריך "0"

המשך חוקי חזקות

6. כאשר בסיס החזקה הוא מספר שלם ומעריך החזקה הוא שלילי: ערכה של החזקה שווה לאחד חלקי הבסיס בחזקה החיובית, כלומר, $(a \neq 0)$ $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

לדוגמה: $3^{-2} = \frac{1}{3^2}$.

7. כאשר בסיס החזקה הוא שבר והמעריך הוא שלילי, נוכל לרשום את החזקה מחדש אם נהפוך את המונה והמכנה של השבר ועם מאריך חיובי כלומר: $\left(\frac{b}{a}\right)^n = \left(\frac{a}{b}\right)^{-n}$.

לדוגמה: $\left(\frac{4}{3}\right)^n = \left(\frac{3}{4}\right)^{-n}$

8. **כל** מספר (השונה מאפס) בחזקת "0" שווה ל-1. כלומר, $a \neq 0, a^0 = 1$.

ניתן להסביר חוק זה באמצעות חוק מספר 2.

כל מספר חלקי אותו מספר = 1, ולכן $\frac{a^n}{a^n} = 1$. על פי חוק מספר 2, $\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n=0}$

ולכן, $a^0 = 1$.

שאלות

שנו את הביטויים הבאים לביטויים בעלי חזקה חיובית

1. 4^{-2}

2. 3^{-4}

3. x^{-3}

4. $\left(\frac{3}{8}\right)^{-5}$

5. $\left(\frac{a}{4}\right)^{-7}$

6. a^{-2b}

7. $(-2)^{-6}$

8. $\left(\frac{1}{4}\right)^{-2}$

מבוא לאלגברה חזקות ושורשים

פתרו את התרגילים הבאים:

.9 a^1

.10 1^{-32}

.11 13^0

.12 0^1

.13 $\left(\frac{13}{15}\right)^1$

.14 $\left(\frac{x}{y}\right)^0$

.15 1^0

.16 0^7

תשובות

1	$\frac{1}{16}$	**7**	$\frac{1}{(-2)^6}$	**13**	$\frac{13}{15}$
2	$\frac{1}{81}$	**8**	$4^2 = 16$	**14**	1
3	$\frac{1}{x^3}$	**9**	a	**15**	1
4	$\left(\frac{8}{3}\right)^5 = \frac{8^5}{3^5}$	**10**	1	**16**	0
5	$\left(\frac{4}{a}\right)^7 = \frac{4^7}{a^7}$	**11**	1		
6	$\frac{1}{a^{2b}}$	**12**	0		

שורשים

שורש מסדר n של מספר כלשהו a, מסומן כ-$\sqrt[n]{a}$, הוא מספר <u>חיובי</u> שאם נעלה אותו בחזקת n נקבל את a.לדוגמה: שורש מסדר 3 של 8, המסומן כ-$\sqrt[3]{8}$ הוא מספר חיובי שאם נעלה אותו בחזקה של 3, נקבל 8. מכיוון ש-$8 = 2^3$ אז $\sqrt[3]{8} = 2$. פנים השורש תמיד יהיה גדול מ-"0".

<u>שורש ריבועי</u>: כאשר לא מסומן הסדר של השורש, השורש הוא שורש ריבועי. שורש ריבועי של מספר כלשהו a הוא השורש מסדר 2 של אותו המספר, **והוא** מסומן כ-$\sqrt{a}$.

כלומר, מספר חיובי שאם נעלה אותו בחזקת 2 נקבל את a.

לדוגמה: $\sqrt{36} = \sqrt[2]{36} = 6$

חשוב לדעת: כאשר נתון לנו כי $b^n = a$, עבור n אי זוגי נסמן $b = \sqrt[n]{a}$ ונמצא את המספר שאם נעלה אותו בחזקת n נקבל את a.

לעומת זאת, עבור n זוגי יהיו שתי תשובות. מספר המועלה בחזקה **זוגית** תמיד יהיה חיובי ולכן:

1. עבור $b \geq 0$ נסמן $b = \sqrt[n]{a}$
2. עבור $b < 0$ נסמן $b = -\sqrt[n]{a}$

למספר חיובי יהיו תמיד שני שורשים מסדר זוגי. לדוגמא נניח כי x הוא שורש של 16 ולפי ההגדרה יתקיים $x^2 = 16$, ופתרונות משוואה זו יהיו $x_1 = 4$ ו-$x_2 = -4$.

אם כך, עלינו לרשום את התשובה למשוואה $x^2 = 16$ כך:

$$x_2 = -\sqrt{16} = -4 \qquad x_1 = \sqrt{16} = 4$$

מבוא לאלגברה חזקות ושורשים

1. כל שורש ניתן לבטא גם כחזקה לפי הכלל הבא: $\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}\ (a > 0)$

לדוגמה: $\sqrt[6]{2^5} = 2^{\frac{5}{6}}$

2. כאשר הביטוי שבתוך השורש הוא מכפלה, נוכל לכתוב את השורש כולו כמכפלת השורשים מאותו הסדר של גורמי המכפלה שבשורש. כלומר: $\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$

לדוגמה: $\sqrt{20} = \sqrt{4 \cdot 5} = \sqrt{4} \cdot \sqrt{5} = 2 \cdot \sqrt{5}$

3. כאשר נתון שורש של שבר, ערכו של השורש יהיה שקול לשורש המונה חלקי שורש המכנה. כלומר: $\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$

לדוגמה: $\sqrt[4]{\frac{3}{8}} = \frac{\sqrt[4]{3}}{\sqrt[4]{8}}$

שאלות

רשמו את השורשים הבאים כחזקות

1. $\sqrt[6]{6^9}$

2. $\sqrt{7^3}$

3. $\sqrt[5]{2^3}$

4. $\sqrt{7^2}$

5. $\sqrt[z]{x^y}$

6. $\sqrt[4]{12^{2x}}$

רשמו את החזקות הבאות כשורשים

7. $x^{\frac{3}{y}}$

8. $3^{\frac{2}{5}}$

9. $7^{\frac{2}{3}}$

10. $4^{\frac{1}{2}}$

11. $23^{\frac{8}{8}}$

12. $12^{\frac{1}{7}}$

מבוא לאלגברה חזקות ושורשים

פשטו את התרגילים הבאים על ידי פירוק מרכיבי השורש:

.13 $\sqrt{27}$

.14 $\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}}$

.15 $\sqrt[4]{32}$

.16 $\sqrt{12}\cdot\sqrt{3}$

.17 $\sqrt{54}$

.18 $\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}}$

.19 $\sqrt{9x}$

.20 $\sqrt{5}\cdot\sqrt{3}\cdot\sqrt{15}$

.21 $\sqrt{\frac{a}{4}}$

.22 $\frac{\sqrt{6}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

.23 $\sqrt[4]{\frac{x^8}{y^{12}}}$

.24 $\sqrt{150}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$

.25 $\sqrt{\frac{25}{36}}$

.26 $\frac{\sqrt[3]{x^{13}}}{\sqrt[3]{x^7}}$

.27 $\frac{\sqrt{200}}{10}$

.28 $\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[3]{4x^2}$

.29 $\frac{\sqrt[3]{16}}{2}$

.30 $\frac{\sqrt[3]{27x}\cdot\sqrt[3]{x^2}\cdot\sqrt[3]{4x^4}}{\sqrt[3]{2x}}$

.31 $\frac{\sqrt[3]{2000}}{\sqrt[3]{2}}$

.32 $\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{20}}$

.33 $\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}}$

.34 $\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^{16}}}{\sqrt[3]{x^8}}$

פשטו את הביטויים הבאים:

35. $\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}}$

36. $\sqrt{\sqrt{81}}$

37. $\sqrt[4]{\sqrt{x}}$

38. $\sqrt[b]{\sqrt[a]{c}}$

39. $\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{27}}}}$

40. $\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^{20}}} \cdot \sqrt[2]{\sqrt[9]{a^{16}}}$

41. $\sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[2a]{z}}}$

מבוא לאלגברה חזקות ושורשים

תשובות

1	$6^{\frac{9}{6}} = 6^{\frac{3}{2}}$	15	$\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2} = 2\sqrt[4]{2}$	29	$\frac{\sqrt[3]{8} \cdot \sqrt[3]{2}}{\sqrt[3]{8}} = \sqrt[3]{2}$
2	$7^{\frac{3}{2}}$	16	$\sqrt{3} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{4} = 6$	30	$\frac{3x\sqrt[3]{4x^4}}{\sqrt[3]{2x}} = \frac{3x \cdot \sqrt[3]{2x} \cdot \sqrt[3]{2x^3}}{\sqrt[3]{2x}} = \sqrt[3]{54}x^2$
3	$2^{\frac{3}{5}}$	17	$\sqrt{54} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = 3\sqrt{6}$	31	$\sqrt[3]{1000} \cdot \sqrt[3]{2} = 10\sqrt[3]{2}$
4	7	18	$\frac{\sqrt{100} \cdot \sqrt{5}}{\sqrt{5}} = 10$	32	$\frac{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{4} \cdot \sqrt{5}} = 2$
5	$x^{\frac{y}{z}}$	19	$3\sqrt{x}$	33	$\frac{\sqrt[3]{4} \cdot \sqrt[3]{125}}{\sqrt[3]{4}} = 5$
6	$12^{\frac{2x}{4}} = 12^{\frac{x}{2}}$	20	$\sqrt{15} \cdot \sqrt{15} = 15$	34	$\sqrt[3]{\frac{x^{17}}{x^9}} = \sqrt[3]{x^{17-9}} = x^3$
7	$\sqrt[y]{x^3}$	21	$\frac{\sqrt{a}}{\sqrt{4}} = \frac{\sqrt{a}}{2}$	35	$\sqrt[8]{2}$
8	$\sqrt[5]{3^2} = \sqrt[5]{9}$	22	$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 2$	36	$\sqrt[4]{81} = \sqrt{9} = 3$
9	$\sqrt[3]{7^2} = \sqrt[3]{49}$	23	$\frac{x^{\frac{8}{4}}}{y^{\frac{12}{4}}} = \frac{x^2}{y^3}$	37	$\sqrt[8]{x}$
10	$\sqrt{4} = 2$	24	$\frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{25} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = 10$	38	$\sqrt[ab]{c}$
11	$\sqrt[8]{23^8} = 23$	25	$\frac{5}{6}$	39	x
12	$\sqrt[7]{12}$	26	$\sqrt{\frac{x^{13}}{y^7}}$	40	$a^{\frac{10}{9}} \cdot a^{\frac{8}{9}} = a^2$
13	$\sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = 3\sqrt{3}$	27	$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{100}}{\sqrt{100}} = \sqrt{2}$	41	$\sqrt[2a^2b]{z}$
14	$\frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{49}}{\sqrt{2}} = \sqrt{49} = 7$	28	$\sqrt[3]{2x \cdot 4x^2} = \sqrt[3]{8x^3} = 2x$		

סיכום חוקי חזקות ושורשים

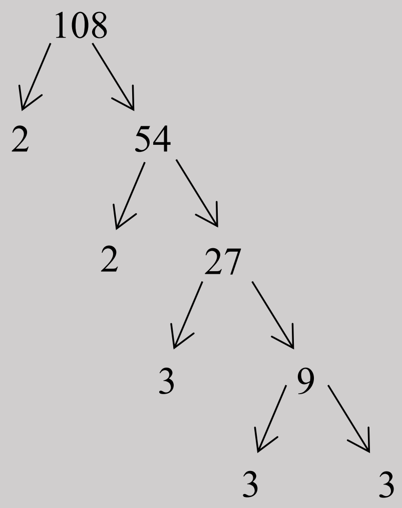
	הגדרת החזקה	חוקי חזקות	דוגמאות
1	בסיסים שווים מעריכים שונים	$a^m \cdot a^n = a^{m+n}$	$2^2 \cdot 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$
2		$\frac{a^m}{a^n} = a^{m-n}$ $(a \neq 0)$	$\frac{3^4}{3^2} = 3^{4-2} = 3^2$
3	חזקה של חזקה	$(a^m)^n = a^{m \cdot n}$	$(5^2)^4 = 5^{2 \cdot 4} = 5^8$
4	בסיסים שונים עם מעריכים שווים	$(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(2 \cdot 3)^4 = 2^4 \cdot 3^4$
5		$\left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$ $(b \neq 0)$	$\left(\frac{3}{4}\right)^2 = \frac{3^2}{4^2}$
6	מעריך שלילי	$a^{-n} = \frac{1}{a^n}$ $(a \neq 0)$	$4^{-3} = \frac{1}{4^3}$
7		$\left(\frac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\frac{b}{a}\right)^n$	$\left(\frac{2}{5}\right)^{-3} = \left(\frac{5}{2}\right)^3$
8	הקשר בין חזרה לשורש	$\sqrt[m]{a^n} = a^{\frac{n}{m}}$ $(a > 0)$	$\sqrt[3]{5^2} = 5^{\frac{2}{3}}$
9	מספר בחזקת "0"	$a^0 = 1$ $(a \neq 0)$	$3^0 = 1$
10	שורש של מכפלה	$\sqrt[n]{a \cdot b} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{2 \cdot 3} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{3}$
11	שורש של מנה	$\sqrt[n]{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt[3]{\frac{4}{5}} = \frac{\sqrt[3]{4}}{\sqrt[3]{5}}$
12	שורש של שורש	$\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[n \cdot m]{a}$	$\sqrt[5]{\sqrt[3]{3}} = \sqrt[5 \cdot 3]{3} = \sqrt[15]{3}$

חשוב לדעת

כל מספר ניתן לפרק לגורמים ראשוניים בלבד (מספרים טבעיים המתחלקים ללא שארית בדיוק בשני מספרים טבעיים, רק בעצמם וב-1, לדוגמא: 2,3,5,7,11...).

בשביל למצוא את כל המחלקים הראשוניים של מספר מסוים, יש לחלק את המספר במחלקים ראשוניים עד שנצמצם את המספר המקורי למספר ראשוני כלשהו.

נפרק לדוגמא את המספר 108 לגורמים ראשוניים:



כלומר את המספר 108 אפשר גם להביע כך: $108=3\cdot3\cdot3\cdot2\cdot2$.

משוואות

משוואות הן נושא בסיסי באלגברה שיכול להופיע בכל סוגי השאלות וחשוב להכירו ולשלוט בטכניקות השונות בו. **משוואה** מורכבת משני ביטויים הכוללים מספרים ונעלמים. כל חלק במשוואה נקרא ״אגף״ (אגף ימני ואגף שמאלי) ובין שני האגפים נמצא סימן השוויון (=). סימן השוויון מעיד כי שני אגפי המשוואה שווים זה לזה.

דוגמא למשוואה :

$$3x + 1 = 4x - 2$$

אגף ימני

סימן השוויון

אגף שמאלי

המטרה בפתרון המשוואה היא למצוא ביטוי לנעלם, שיקיים את השיוון, הביטוי יכול להיות מספרי או בעזרת אותיות.

<u>כלליים בסיסיים בפתרון משוואות</u>

בשביל לפתור משוואות עלינו להחיל פעולות חשבוניות על המשוואה, כך שנגיע למצב שהמשתנה נמצא באגף אחד של המשוואה, בעוד שבאגף השני ישנם מספרים ו/או אותיות. במשוואה ניתן לבצע כל פעולת חשבון, בתנאי שהפעולה מתבצעת על שני אגפי המשוואה במקביל. הסיבה לכך היא שבדרך זו השוויון נשמר. לכן, הפעולה החשבונית שומרת על הערך המקורי של הנעלם. בדרך זו, נוכל לבודד את המשתנה בצד אחד ואת המספרים בצד השני.

דוגמה :

נתונה המשוואה $10 = \frac{2x}{5}$, מהו ערכו של x ?

פתרון:

יש לבודד את הנעלם באגף אחד ואת המספרים באגף השני, בשביל לבצע מטרה זו נכפיל

ב-5 את שני האגפים של המשוואה ונקבל את השיוון הבא: $2x = 50$.

ואז נחלק את שני האגפים של המשוואה במספר 2 כך שנקבל: $x = 25$

דוגמה:

נתונה המשוואה $\frac{3x-2}{2} - \frac{x+1}{7} = \frac{-3x+6}{14}$

מהו ערכו של x?

פתרון:

נכפיל את שני האגפים של המשוואה ב-14, המכנה המשותף של כל גורמי המשוואה

ונקבל את המשוואה הבאה: $21x - 14 - 2x - 2 = -3x + 6$

נעביר את כל הנעלמים לצד שמאל ואת כל המספרים לצד ימין ונקבל: $22x = 22$.

נחלק את שני האגפים של המשוואה ב-22 ונקבל $x = 1$

הערה חשובה:

<u>אסור</u> לחלק או לכפול ב-0 את אגפי המשוואה, או לחלק או לכפול במשתנה שאנו לא יודעים אם הוא שווה ל-0, לכן בשאלות בהן הנעלם במכנה עלינו לבדוק איזה ערכים שלו יאפסו את המכנה וצריך לפסול אותם מתחום ההגדרה.

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות :

1. $3x = 9$
2. $12x = 9$
3. $\frac{1}{5}x = 3$
4. $\frac{3}{4}x = -12$
5. $5x = 9 - 2x$
6. $2x - 12 = 3x - 25$
7. $\frac{x-2}{7} = 0$
8. $10x - 7 = 5x + 14 - 2x$
9. $-7x + 2x + 13 = x - 17$
10. $3x + 10 - 9x + 1 = 4x - 9$
11. $3(x-1) - 9x = 15$
12. $3x - (x+1) = 19$
13. $2 - 3(2x - 4) = 8$
14. $-4(x+7) = 3x$
15. $6\left(\frac{x-5}{6} + 3\right) = 29$
16. $12\left(\frac{x}{2} - \frac{5}{6}\right) = 14$
17. $(x-1)(x+3) = x(x+5)$
18. $(x-2)(x+3) = (x-4)(x+6)$
19. $(x+6)^2 = x(x+3)$
20. $\frac{x}{3} - \frac{3x}{4} = -x - 7$
21. $\frac{6x}{7} - \frac{3x+1}{2} = \frac{11}{14}$

תשובות

1	$x = 3$	**8**	$x = 3$	**15**	$x = 16$
2	$x = \frac{3}{4}$	**9**	$x = 5$	**16**	$x = 4$
3	$x = 15$	**10**	$x = 2$	**17**	$x = -1$
4	$x = -16$	**11**	$x = -3$	**18**	$x = 18$
5	$x = \frac{9}{7}$	**12**	$x = 10$	**19**	$x = -4$
6	$x = 13$	**13**	$x = 1$	**20**	$x = -12$
7	$x = 2$	**14**	$x = -4$	**21**	$x = -2$

משוואות ממעלה ראשונה עם פרמטרים

לעיתים, נתקל בשאלות בהם בנוסף לנעלם, אותו אנו מחפשים, קיים פרמטר מספרי בשאלה. הפרמטר הוא מספר שערכו אינו ידוע אך ניתן להתייחס אליו כאל ידוע במהלך פתירת התרגיל. כלומר, נוכל "להשאיר" את הפרמטר בתשובות במידה ולא נתבקש למצוא את ערכו. המשתנה לעומת זאת, מייצג תהליך או גודל מדיד אותו אנו לרוב מחפשים ולא נשתמש בו על מנת לבטא תשובות או תוצאות.

במשוואות ממעלה ראשונה עם פרמטרים, נביע את הנעלם בעזרת האותיות והמספרים במשוואה. פתרון שאלות אלו מתבססות על טכניקות אלגבריות, למשל, פירוק לגורמים.

למשל, נניח וידוע ש a פרמטר מספרי, אפתור את המשוואה הבאה :

$$3x - 3a = 6 \rightarrow 3x = 3a + 6 \rightarrow x = 3 + a$$

כלומר, ביטאתי את ערך הנעלם באמצעות הפרמטר הנתון לי.

דוגמא:

פתור את המשוואה $8m(m + 2x) + 2(2m - x) = 5m$

פתרון:

ראשית נפתח סוגריים :

$$8m^2 + 16xm + 4m - 2x = 5m$$

נבודד את x באגף אחד ואת הפרמטרים והמספרים באגף השני :

$$16mx - 2x = m - 8m^2$$

נבצע הוצאת גורם משותף בשני האגפים :

$$2x(8m - 1) = m(1 - 8m)$$

נחלק ב- $2(8m - 1)$:

$$x = \frac{m(1-8m)}{2(8m-1)} = -\frac{m(8m-1)}{2(8m-1)} = -\frac{m}{2}$$

קיבלנו שהערך של x הוא : $\frac{-m}{2}$.

מבוא לאלגברה משוואות

שאלות

פתור את המשוואות הבאות ומצא את x, אם צריך בטא אותו באמצעות הפרמטרים הנתונים a ו/או b :

.1 $4x - 16a = -2x + 2a$

.2 $6a + 5x = 7(x - 2a)$

.3 $8(2x - b) - 3(5x - 3b) = 7b - x + 8$

.4 $\frac{x+2}{bx} = \frac{1}{b} + \frac{2}{b+x}, b \neq 1$

.5 $\frac{4a+x}{a^2 - ax} = \frac{x}{4a - 4x}$

.6 $bx + 16x = b$

.7 $6x - 4a = 4ax + 2$

.8 $8 + 12x = a(4 - 6x)$

.9 $-8a - 3(3x - 5a) = 4(a - 6x)$

.10 $3x - 4b - 8 = 2b - 3x + 4$

.11 $8b(x + 2) = 6bx - 10$

.12 $\frac{b}{4x^2 - a^2} = \frac{b}{2x - a} + \frac{2b}{2x + a}$

.13 $\frac{-2bx}{a^2 - b^2} = \frac{x}{a - b} + \frac{3a}{a + b}$

.14 $4a(a + 2x) + 2(2a - x) = 5a$

.15 $b(-2 - bx) = 6(bx + 2)$
$bx \neq -2$

.16 $b(1 - bx) = x(b - 6) - 3$
$b \neq 2, -3$

תשובות

1	$x = 3a$	7	$x = -\frac{2a+1}{3+2a}$	13	$x = \frac{3a^2 - 3ab}{-a - 3b}$
2	$x = 10a$	8	$x = \frac{2(a-2)}{3(2+a)}$	14	$x = -\frac{a}{2}$
3	$x = 3b + 4$	9	$x = -\frac{a}{5}$	15	אם $b = -6$, המשוואה מתקיימת לכל x. אם לא, אין פתרון.
4	$x = \frac{b}{1-b}$	10	$x = b + 2$		
5	$x = \frac{16a}{a-4}$	11	$x = -\frac{(8b+5)}{b}$		
6	$x = \frac{b}{b+16}$	12	$x = \frac{a+1}{6}$	16	$x = \frac{1}{b-2}$

מערכת משוואות עם שני נעלמים

בחלק זה נתעמק במערכת של שתי משוואות עם שני נעלמים. ככלל אצבע – **כמות המשוואות** תהיה **ככמות הנעלמים** על מנת שנוכל לפתור את המשוואה. ישנם שתי דרכים עיקריות אותם נלמד על מנת לפתור שתי משוואות עם שני נעלמים.

השוואת המקדמים – בעזרת פעולת הכפל על אחת המשוואות, ניתן להשוות בין מקדמי הנעלמים ולאחר מכן לבצע חיבור ו/או חיסור בין שתי המשוואות. כך אחד הנעלמים יצטמצם ונוכל לבודד את הנעלם השני. לאחר שמוצאים את ערכו של נעלם זה, נציב את ערכו באחת מהמשוואות המקוריות על מנת למצוא את ערך הנעלם השני.

דוגמא

פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases} 5x + 7y - 3 = 2x + 10 \\ 6x - 3y + 4 = 6 - 5y \end{cases}$$

ראשית נסדר את הנעלמים בצד אחד ואת המספרים בצד השני:

$$\begin{cases} 3x + 7y = 13 \\ 6x + 2y = 2 \end{cases}$$

ניתן לראות כי במידה ונצמצם את המשוואה השנייה ב-2, נוכל להגיע למצב בו שני המקדמים של הנעלם x יהיו שווים ל-3.

$$\begin{cases} 3x + 7y = 13 \\ 3x + y = 1 \end{cases}$$

כעת, נוכל לחסר בין שתי המשוואות וכך "להעלים" את הנעלם x:

$$3x + 7y - (3x + y) = 13 - (+1)$$

$$6y = 12 \xrightarrow{:6} y = 2$$

כעת נציב את ערך y שמצאנו באחת המשוואות על מנת למצוא את x :

$$3x + 2 = 1 \xrightarrow{-2} 3x = -1 \xrightarrow{:3} x = -\frac{1}{3}$$

כלומר , פתרון המשוואה הוא $\mathbf{y = 2}$, $\mathbf{x = -\frac{1}{3}}$

<u>שיטת ההצבה</u> - ביטוי אחד הנעלמים בעזרת הנעלם השני.

<u>דוגמא :</u>פתור את מערכת המשוואות הבאה :

$$\begin{cases} y - 5x = 12 \\ y + x = 6 \end{cases}$$

ראשית, ננסה לבטא את אחד הנעלמים באמצעות הנעלם השני. ניתן לעשות זאת בקלות באמצעות המשוואה השנייה על ידי העברת אגפים, כך נקבל : $y = 6 - x$.

את הביטוי שקיבלנו עבור y נציב במשוואה הראשונה במקום y : $6 - x - 5x = 12$

קיבלנו משוואה עם נעלם אחד, דבר שאנחנו יודעים לפתור, וכעת נמצא את ערך x :

$$6 - 6x = 12 \xrightarrow{-6} -6x = 6 \xrightarrow{:(-6)} x = -1$$

נציב תוצאה זו במשוואה הראשונה כדי למצוא את ערכו של y :

$$y - 5x = 12 \rightarrow y - 5(-1) = 12 \rightarrow y + 5 = 12 \xrightarrow{-5} y = 7$$

כלומר, פתרון המשוואה הוא $\boldsymbol{y = 7}$, $\boldsymbol{x = -1}$

מבוא לאלגברה משוואות

שאלות

1. $\begin{cases} y - x = 5 \\ y + x = 11 \end{cases}$

2. $\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$

3. $\begin{cases} 5x + 2y = 25 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 7x + y = 9 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$

5. $\begin{cases} 3x + 2y = -7 \\ -x + 6y = 9 \end{cases}$

6. $\begin{cases} 3x + 6y = 18 \\ 7x - 18y = 10 \end{cases}$

7. $\begin{cases} -8x + 3y = 10 \\ 3x + 2y = -10 \end{cases}$

8. $\begin{cases} 3x - 6y = 9 \\ 8x + 4y = 24 \end{cases}$

9. $\begin{cases} 5x - 2y = 16 \\ -17x + 10y = -40 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 2x + 3y = y + 4 \\ -9x - 12 = 6 - 3x \end{cases}$

11. $\begin{cases} y + 3(x + 4) = 3 \\ 4y + 6(x + 4) = 12 \end{cases}$

12. $\begin{cases} 3y + 4(x - 5) = 25 \\ 8(y - 1) + 4x = 52 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3(x + y) = x - y + 6 \\ 5(2x + 3y) = 4x - 3y \end{cases}$

14. $\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 2 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases}$

15. $\begin{cases} \frac{3y}{5} + \frac{x}{3} = 4 \\ 3y - x = -4 \end{cases}$

16. $\begin{cases} \frac{y}{6} + \frac{x}{3} = 2 \\ 5x - y = -19 \end{cases}$

17. $\begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases}$

18. $\begin{cases} 0.3x - 0.9y = 0 \\ 0.7x - 0.5y = -3.2 \end{cases}$

19. $\begin{cases} 0.35x - 0.6y = 0.1 \\ 0.2x - 0.15y = 0.25 \end{cases}$

20. $\begin{cases} 1.5x + 0.3y = -0.3 \\ 0.5x + 1.2y = 3.2 \end{cases}$

21. $\begin{cases} 9x - 3y = 18 - 3y \\ 30x + 4y = 6x - 4y \end{cases}$

תשובות

1	$y = 8\ x = 3$	**8**	$y = 0\ x = 3$	**15**	$y = \frac{5}{3}\ x = 9$
2	$y = 1\ x = 5$	**9**	$y = 4.5\ x = 5$	**16**	$y = 14\ x = -1$
3	$y = 0\ x = 5$	**10**	$y = 5\ x = -3$	**17**	$y = 2\ x = 0$
4	$y = 2\ x = 1$	**11**	$y = 3\ x = -4$	**18**	$y = -2\ x = -6$
5	$y = 1\ x = -3$	**12**	$y = 3\ x = 9$	**19**	$y = 1\ x = 2$
6	$y = 1\ x = 4$	**13**	$y = -3\ x = 9$	**20**	$y = 3\ x = -\frac{4}{5}$
7	$y = -2\ x = -2$	**14**	$y = 5\ x = 2$	**21**	$y = -6\ x = 2$

משוואות ריבועיות

משוואה ריבועית היא משוואה מהצורה הבאה : $ax^2 + bx + c$. כלומר, משוואה בה קיים נעלם בריבוע, נעלם נוסף ואיבר חופשי. פתרון של משוואה מסוג זה נקרא "שורש המשוואה". לכל משוואה ריבועית יכול להיות שורש אחד, שני שורשים או שלא יהיו לה שורשים כלל. במהשך, נלמד איך לקבוע כמה שורשים יהיו לכל משוואה גם מבלי לפתור אותה באופן מלא. את שורשי המשוואה ניתן למצוא על פי השלבים הבאים :

1. נרכז את כל איברי המשוואה באגף אחד, באגף השני ישאר "0". נקפיד לסדר את המשוואה בסדר חזקות יורד בצורה שתקל עלינו
2. נציב את <u>המקדמים</u> המספריים בנוסחא הבאה, **נוסחת השורשים** :

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

דוגמא: פתור את המשוואה : $x^2 + 3x + 2 = 0$

פתרון:

מדובר במשוואה ריבועית ולכן נוכל להיעזר בנוסחת שורשים. תחילה, נפריד את מקדמי המשוואה :

המקדם של x^2 הוא 1, לכן $\boxed{a = 1}$.

המקדם של x הוא 3, לכן $\boxed{b = 3}$.

האיבר החופשי הוא $\boxed{c = 2}$.

נציב בנוסחת השורשים ונקבל:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-3\pm\sqrt{3^2-4\cdot1\cdot2}}{2\cdot1}=\frac{-3\pm1}{2}=\begin{cases}\frac{-3+1}{2}=-1\\[4pt] \frac{-3-1}{2}=-2\end{cases}$$

כלומר הפתרונות הם: $x_1=-1$, $x_2=-2$.

מערכת משוואות ממעלה שנייה עם שני נעלמים

דוגמה:

פתור את מערכת המשוואות הבאה:

$$\begin{cases}y-x=8\\2xy=10\end{cases}$$

פתרון:

דרך א׳:

נבטא את y בעזרת המשוואה הראשונה: $y=8+x$

את הביטוי הנ״ל נציב במשוואה השנייה במקום y: $2x\cdot(8+x)=10$

$$16x+2x^2=10\ \xrightarrow{-10}\ 0=2x^2+16x-10\ \xrightarrow{:2}\ 0=x^2+4x-5$$

קיבלנו משוואה עם **נעלם אחד** וכעת נמצא את ערכו:

קיבלנו משוואה ריבועית, $a=1$, $b=4$, $c=-5$. נציב בנוסחת השורשים ונקבל:

$$x_{1,2}=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}=\frac{-4\pm\sqrt{4^2-4\cdot(1)\cdot(-5)}}{2\cdot(1)}=\frac{-4\pm6}{2}=\begin{cases}\frac{-4+6}{2}=1\\[4pt] \frac{-4-6}{2}=-5\end{cases}$$

כלומר שורשי המשוואה הם: $x_1=1$, $x_2=-5$.

כעת עלינו למצוא את ערכו של y, נחשבו ע״י הצבה במשוואה הראשונה:

עבור $x = 1$: $y = 8+1=9$

עבור $x = -5$: $y = 8+(-5)=3$

<u>דרך ב׳</u>:

נבטא את y בעזרת המשוואה השנייה: $y = \frac{10}{2x}$

את הביטוי הנ״ל נציב במשוואה הראשונה במקום y: $\frac{10}{2x} - x = 8$

קיבלנו משוואה עם נעלם אחד וכעת נמצא את ערכו:

$$\frac{10}{2x} - x = 8 \quad \rightarrow \quad 10 - 2x^2 = 16x$$

$$\rightarrow \quad 0 = 2x^2 + 16x - 10 \quad \overset{:2}{\rightarrow} \quad 0 = x^2 + 4x - 5$$

בדומה לדרך א׳, קיבלנו משוואה ריבועית, $a = 1$, $b = 4$, $c = -5$. נציב בנוסחת השורשים ונקבל:

$$x_{1,2} = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot(1)\cdot(-5)}}{2\cdot(1)} = \frac{-4 \pm 6}{2} = \begin{cases} \frac{-4+6}{2} = 1 \\ \frac{-4-6}{2} = -5 \end{cases}$$

כלומר שורשי המשוואה, כפי שגם פתרנו בדרך א׳ הם: $x_1 = 1$, $x_2 = -5$.

מבוא לאלגברה משוואות

שאלות

פתרו את המשוואות הבאות:

1. $x^2 + 7x + 10 = 0$

2. $x^2 - 4x - 21 = 0$

3. $x^2 - 17x + 72 = 0$

4. $x^2 + 8x + 12 = 0$

5. $2x^2 + 9x - 5 = 0$

6. $2x^2 + 12x + 16 = 0$

7. $6x^2 - 14x - 12 = 0$

8. $8x^2 - 30x - 143 = 0$

9. $12x^2 - 2x - 70 = 0$

10. $50x^2 - 55x - 63 = 0$

פתרו את מערכת המשוואות הבאות:

11. $\begin{cases} y - x = 4 \\ 2xy = 10 \end{cases}$

12. $\begin{cases} y = 2x^2 + 6x - 14 \\ y = -2x^2 + 10x - 6 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 16x^2 - 2y^2 = 32 \\ y = 2 - 3x \end{cases}$

14. $\begin{cases} 4x^2 + 3xy - 5y^2 = 20 \\ x = 3 + y \end{cases}$

15. $\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y^2 - x = 8 \end{cases}$

תשובות

1	$x_1 = -2\ ,\ x_2 = -5$	**6**	$x_1 = -2\ ,\ x_2 = -4$	**11**	$x_1 = 1\ ,\ y_1 = 5$ $x_2 = -5\ ,\ y_2 = -1$
2	$x_1 = 7\ ,\ x_2 = -3$	**7**	$x_1 = -\frac{2}{3}\ ,\ x_2 = 3$	**12**	$x_1 = 2\ ,\ y_1 = 6$ $x_2 = -1\ ,\ y_2 = -18$
3	$x_1 = 9\ ,\ x_2 = 8$	**8**	$x_1 = \frac{13}{2}\ ,\ x_2 = -\frac{11}{4}$	**13**	$x_1 = 2\ ,\ y_1 = -4$ $x_2 = 10\ ,\ y_2 = -28$
4	$x_1 = -2\ ,\ x_2 = -6$	**9**	$x_1 = \frac{5}{2}\ ,\ x_2 = -\frac{7}{3}$	**14**	$x_1 = \frac{5}{2}\ ,\ y_1 = -\frac{1}{2}$ $x_2 = -13\ ,\ y_2 = -16$
5	$x_1 = \frac{1}{2}\ ,\ x_2 = -5$	**10**	$x_1 = \frac{9}{5}\ ,\ x_2 = -\frac{7}{10}$	**15**	אין פתרון ממשי

אי שיוויונות

אי-שוויון מייצג את התחום האפשרי (במספרים או פרמטרים) בו נמצא נעלם מסוים או מספר נעלמים. להבדיל ממשוואה שבה אנו מוצאים ערך אחד אפשרי אחד עבור הנעלם, באי-שוויונות אנו מוצאים תחום מסוים של ערכים אפשריים המתאימים לאי השוויון.

מקרא לאי-שוויונות:

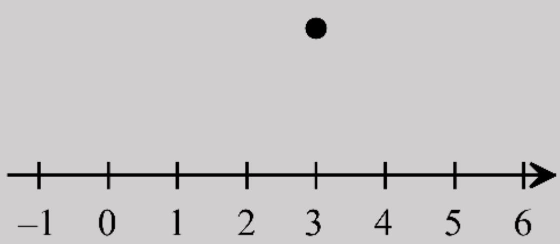
הסימן $>$ מייצג שהאגף אליו פונה "הפה" גדול מהאגף השני.

אגף ימני $>$ אגף שמאלי (הביטוי באגף ימין גדול מהאגף השמאלי)

הסימן $\leq$ מייצג שהאגף שאליו פונה "הפה" עם הקו גדול או שווה לאגף השני.

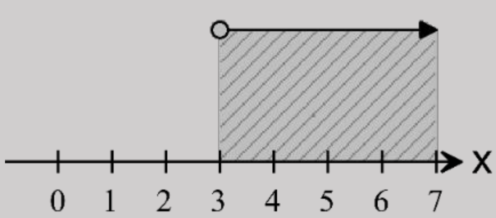
אגף ימני $\leq$ אגף שמאלי (האגף הימני גדול או שווה לאגף השמאלי).

אי-שוויונות על צי המספרים:



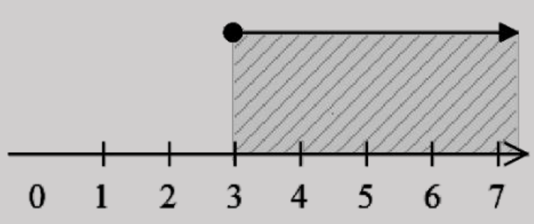
כאמור, משוואה מייצגת פתרון יחיד, לדוגמא המשוואה $x = 3$ תראה על ציר המספרים כך:

אי-שוויון $x < 3$.



לפי אי-שוויון זה, x יכול להיות כל מספר הגדול מ-3 (לא כולל 3). אי-השוויון על ציר המספרים ייראה כך:

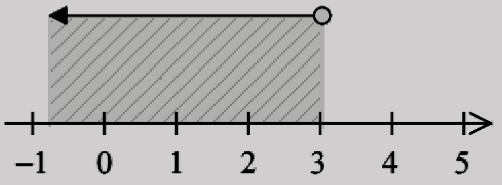
אי-שוויון $x \leq 3$.



לפי אי-שוויון זה, x יכול להיות כל מספר הגדול מ-3 או שווה ל-3.אי-השוויון על ציר המספרים ייראה כך:

אי-שוויון $x < 3$.

לפי אי-שוויון זה, x יכול להיות כל מספר הגדול מ-3 (לא כולל 3).אי-השוויון על ציר המספרים ייראה כך :



חיבור וחיסור באי-שיויונות

לצורך ההסבר נבצע חיבור וחיסור על אי השוויון $10 > 5$, ונראה שאי-השויון נשמר , כלומר שגם לאחר הפעולה אגף ימין גדול מאגף שמאל) : במידה ונוסיף 3 לשני האגפים ונקבל $13 > 8$. מאחר שקיבלנו פסוק אמת (15 אכן גדול מ-10), הרי שאי-השוויון נשמר. נחסיר 2 משני האגפים ונקבל $8 > 3$. מאחר שקיבלנו פסוק אמת (8 אכן גדול מ-3) הרי שאי-השוויון נשמר. לפיכך :

בחיבור ו/או חיסור המתבצע על איברי אי השיוויון, יש לחבר ו/או לחסר את שני האגפים באותו מספר ו/או פרמטר. כך סימן אי-השוויון נשמר.

דוגמא:

פתור את אי-השוויון $x + 2 < 3$.

פתרון:

נחסיר 2 משני האגפים ונקבל $x < 1$.

כפל וחילוק באי-שיויונות

פעולת הכפל והחילוק היא פעולה שעלולה לשנות את ערכי המספרים באופן שישפיע על אי השיוויון ולכן נבדיל כפל וחילוק של אי-שוויונות לשני מקרים שונים : הראשון, כפל וחילוק של מספרים חיוביים והשני, כפל וחילוק של מספרים שליליים.

כפל וחילוק במספרים חיוביים, היא פעולה ששומרת על ערך אי השיוון. לצורך ההסבר נבצע כפל וחילוק על אי השוויון $6 > 3$, נכפיל ב-2 את שני האגפים ונקבל $12 > 6$. מאחר

מבוא לאלגברה אי-שיוויונות

שקיבלנו פסוק אמת (12 אכן גדול מ-6), הרי שאי-השוויון נשמר. נחלק ב-3 משני האגפים ונקבל $2 > 1$. מאחר שקיבלנו פסוק אמת (2 אכן גדול מ-1) הרי שאי-השוויון נשמר.

לפיכך:

כאשר נכפול ו/או נחלק את אי-השוויון במספרים (ו/או פרמטרים חיוביים), סימן אי-השוויון יישאר זהה.

כפל וחילוק במספרים שליליים, לעומת הפעולות שעברנו עליהם, היא פעולה המשנה את ערך הביטוי ולכן אי השיוויון המקורי לא נשמר. לצורך ההסבר נבצע כפל וחילוק על אי השוויון $6 > 3$, נכפיל ב- 2- את שני האגפים ונקבל $-12 > -6$. קיבלנו פסוק שקר (12- קטן מ- 6-), ולכן יש להפוך את סימן אי-השוויון: $-12 < -6$. כלומר:

כאשר נכפול ו/ או חלק את אי-השוויון במספרים (ו/או פרמטרים חיוביים), סימן אי-השוויון יתהפך.

לכן, במידה ונפתור אי- שיוויון עם פרמטר או נעלם, שערכו אינו ידוע לנו, לא נוכל לחלק או להכפיל את אי – השיוויון באותו פרמטר/נעלם. זאת מכיוון שכפל או חילוק שכזה עלול לשנות את כיוון אי-השיווין.

שאלות

בודדו את x בכל אחד מאי-השוויונות הבאים:

1. $2x + 5 < 6$

2. $2 < \frac{x}{3} - 1$

3. $x < 6x - 15$

4. $\frac{x+1}{2} - 1 > 2$

5. $\frac{x}{3} - \frac{x}{4} \geq 5$

6. $\frac{x}{2} - 9 > -\frac{2x}{5}$

7. $2x - a < 1$

8. $\frac{3x+a}{2} \leq 1$

מערכת אי-שיוויונות

בהינתן שני אי-שוויונות (או יותר) המתקיימות עבור אותו נעלם. קיימות שתי מערכות פתרון אפשריות:

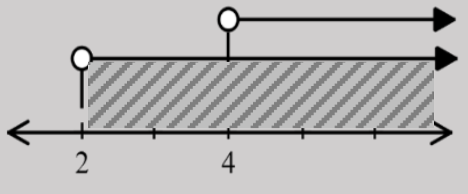
מערכת "או" (איחוד)

כאשר אין חפיפה בין התחומים באי-השוויונות תופיע המילה "או". אפשר להקביל את פתירת אי-השיוונות ואת השרטוט לתופעה מעולם הטבע. נדמיין שהאי-שיוון שלנו היא רצפה. כשיורד גשם, אנחנו מעוניינים להשאיר את האזור שלנו יבש. מדובר בגשם חלש ולכן גג אחד מספיק לנו. אנחנו מעוניינים להגן על הרצפה שלנו מהנקודה הרחוקה ביותר. לכן, במערכת מסוג זה אנחנו נחפש את התחום שכולל את שני האי שוויוניים. כלומר, כל מקום שמכסה אותי מהגשם – מקיים את התנאים שלי.

דוגמא 1:

פתור את המערכת $x > 2$ או $x > 4$.

פתרון:

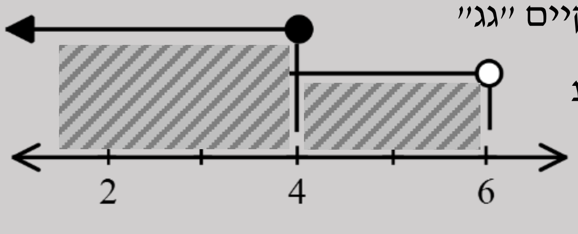


נשרטט את התחומים על ציר המספרים. ניתן לראות כי קיים "גג" החל מכל הערכים שגדולים מ-2. לכן, קבוצת המספרים הנמצאים בלפחות אחד משני התחומים היא $x > 2$.

דוגמא 2:

פתור את המערכת $2 < x < 6$ או $x \leq 4$.

פתרון:



נשרטט את התחומים על ציר המספרים. ניתן לראות כי קיים "גג" עד הערך 6. כלומר, קבוצת המספרים הנמצאים בלפחות אחד משני התחומים היא $x < 6$.

שימו לב! כאשר אנחנו משרטטים על ציר המספרים נקודה "ריקה". משמעותה היא שאנחנו לא מכלילים את המספר בתחום והסימן יהיה < או >. כאשר הנקודה "מלאה" הסימן יהיה ≥ או ≤.

מערכת "וגם" (חיתוך)

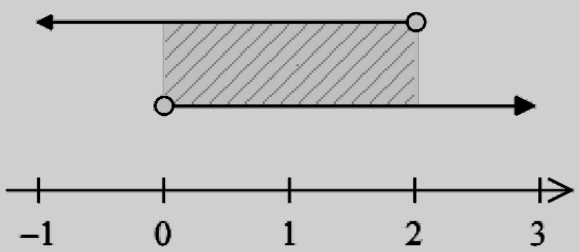
במערכת אי שיוויונות מסוג זה, צריך למצוא את התחום המשותף של שני אי-שוויוניים, מערכת זו נקראת מערכת "וגם". אם נחזור לסיפור שלנו, נמשיל מערכת זו למצב בו הגשם מתחזק ולא מספיק גג אחד. למשל, במקרים של ברד הגג העבה, המכיל את כל תנאי השאלה יאפשר לנו להתגונן מפני הברד בצורה טובה יותר.

דוגמא :

פתור את המערכת $x < 2$ וגם $0 < x$.

פתרון:

נשרטט את התחומים על ציר המספרים. כלומר בדוגמא זו עלינו למצוא את התחום המשותף לשני אי-השוויונות שנתונים לנו, שכן תחום זה הוא התחום המסומן בקווים האלכסוניים:



$0 < x < 2$, כלומר x יכול להיות כל מספר בין 0 ל-2.

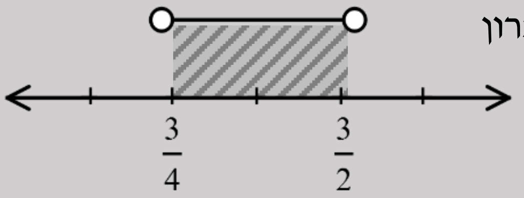
אי-שיוון כפול

אי שיוון כפול, הוא אי שיוון המכיל ביטוי "אמצעי" שגדול מביטוי אחד וקטן מביטוי אחר.

למשל, $2x - 6 < 6x - 9 < 4x - 6$. לאי-שיוויון כפול נתחייס כאל מערכת "וגם". למשל אי השוויון הנ"ל, $2x - 6 < 6x - 9 < 4x - 6$ שקול למערכת הבאה: $6x - 9 < 4x - 6$ וגם $2x - 6 < 6x - 9$.

מבוא לאלגברה אי-שיוויונות

נפתור את אי-השוויונות ונקבל $x < \frac{3}{2}$ וגם $x > \frac{3}{4}$. נשרטט על ציר המספרים את התחומים ונמצא את התחום המשותף לשני התחומים. כלומר, פתרון המערכת הוא ל- $\frac{3}{4} < x < \frac{3}{2}$.



שאלות

לפניך מערכת אי שיוויונות מסוג "או" שרטט את אי-השוויונות על ציר המספרים ומצא את פתרונם:

9. $x > 2$ או $x > 7$

10. $x \le 3$ או $x > -1$

11. $3x - 18 < 0$ או $-1 < x < 4$

12. $-5 < x \le 10$ או $2 < x \le 7$

13. $-3 \ge x$ או $5 \le x$ או $0 < x$

14. $-2 < x \le 4$ או $3 < x$

לפניך מערכת אי שיוויונות מסוג "וגם" שרטט את אי-השוויונות על ציר המספרים ומצא את פתרונם:

15. $x > 3$ וגם $x > -2$

16. $x \le 6$ וגם $x > 3$

17. $4x - 16 < 0$ וגם $x < 2$

18. $-3 < x \le 8$ וגם $2 < x \le 7$

19. $4x + 1 \ge x + 19$ וגם $5 \le x$

20. $4x - 1 \le x + 23$ וגם $x > 1$

שרטט את אי-השוויונות הבאים על ציר המספרים ומצא את פתרונם:

21. $27 < 2x - 7 < 45$

22. $12 \le 4x + 8 < 24$

23. $3x - 4 < 5x + 6 < 7x - 8$

24. $3(x + 1) + 7 < 2(2x + 1) + 5 \le 4(8x + 16) - 1$

25. $2(4x + 1) + 8 < 7(2x - 5) + 9 \le 11(x + 8) + 3$

26. $2(7x + 14) \le 4(5x - 11) < 14(4x - 1)$

תשובות

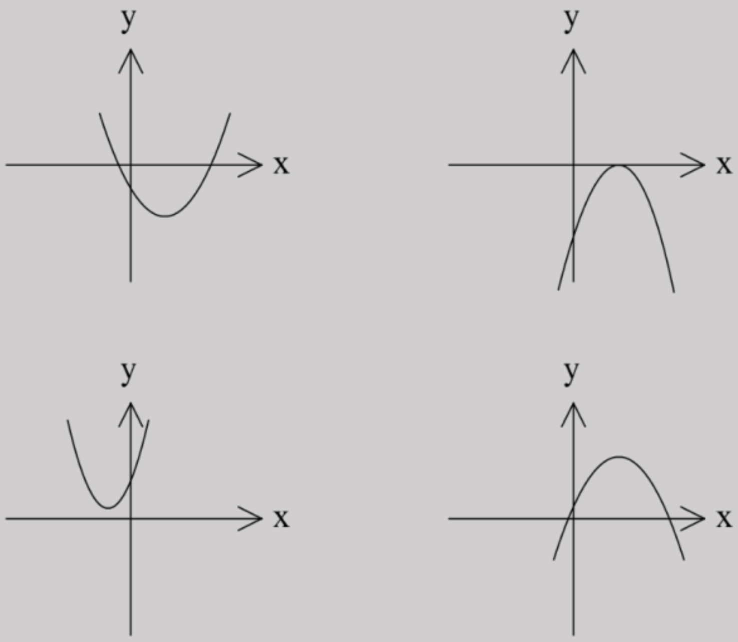
1	$x < \frac{1}{2}$	**10**	כל x	**19**	$x \ge 6$
2	$x > 9$	**11**	$x < 6$	**20**	$1 < x \le 8$
3	$x > 3$	**12**	$-5 < x \le 10$	**21**	$2 < x < 26$
4	$x > 5$	**13**	$x > 0$ או $x \le -3$	**22**	$1 \le x < 4$
5	$x \ge 60$	**14**	$x > -2$	**23**	$x > 7$
6	$x > 10$	**15**	$x > 3$	**24**	$x > 3$
7	$x < \frac{1+a}{2}$	**16**	$3 < x \le 6$	**25**	$6 < x \le 39$
8	$x \le \frac{2-a}{3}$	**17**	$x < 2$	**26**	$x \ge 12$
9	$x > 2$	**18**	$2 < x \le 7$		

הקדמה לאי-שוויונות ריבועיים

על מנת לפתור אי-שוויוניות ריבועיים, אי-שיוונות נעלם ממעלה שנייה, יש להכיר את הפרבולה. פרבולה היא צורה גיאומטרית שיכולה להיראות באחד משני האופנים הבאים:

בשרטוט הנ"ל הפרבולה הימנית היא פרבולה ישרה ("מחייכת"), בה קדקוד הפרבולה הוא הנקודה התחתונה של הפרבולה, כלומר הנקודה בה ערך הפונקציה הוא הנמוך ביותר. הפרבולה השמאלית היא פרבולה הפוכה ("בוכה"), כך שקדקוד הפרבולה הוא הנקודה העליונה של הפרבולה, בה ערך הפונקציה הוא הגבוה ביותר.

הנקודה התחתונה או העליונה של הפרבולה נקראת קדקוד הפרבולה. את הפרבולה ניתן לשרטט על מערכת הצירים, היא תמיד תחתוך את ציר ה-y בנקודה אחת, אך את ציר ה-x היא יכולה לחתוך בשתי נקודות, בנקודה, או בכלל לא לחתוך את ציר ה-x. דוגמאות:



בכל אחד מן הייצוגים הנ"ל, הפרבולה חיובית כאשר היא **מעל ציר ה-x**, ושלילית בחלק שהיא **מתחת לציר ה-x.** נשים לב למשוואת הפרבולה, בעזרתה נוכל להבין האם הפרבולה "ישרה" או "הפוכה". $y = ax^2 + bx + c$

עם זאת, בכל אחד מהייצוגים מתקיים:
אם $a > 0$ אז הפרבולה ישרה ("מחייכת").
אם $a < 0$ אז הפרבולה הפוכה ("בוכה").

אי-שוויונות ריבועיים

אי-שוויונות ריבועיים הם אי-שוויוניות שבהם הנעלם הוא ממעלה שנייה. על מנת לפתור אי-שוויונות אלה נעזר בפרבולות שמשוואתם הכללית היא: $y = ax^2 + bx + c$.

שיטת עבודה לפתרון אי-שוויונות ריבועיים

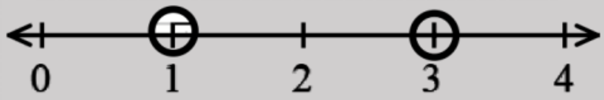
נדגים את שיטת העבודה בעזרת פתירת אי-השוויו הבא: $-x^2 + 4x - 2 > 1$

1. נגיע למצב בסיסי בו כל האיברים מרוכזים באגף אחד: $-x^2 + 4x - 3 > 0$
2. נפתור תרגיל עזר על מנת להגיע לערכי ה- x הדרושים לפתרון אי-השוויון. נחפש את שורשי המשוואה הריבועית, על ידי השוואת האגף השמאלי ל-0.

   תרגיל עזר: $-x^2 + 4x - 3 = 0$.

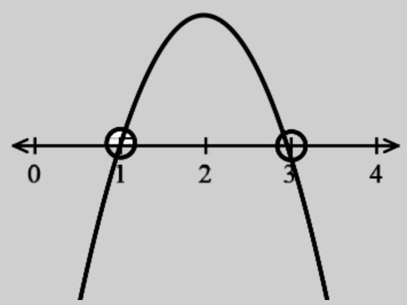
   נציב בנוסחת השורשים, נפתור את המשוואה ונקבל $x_1=1$, $x_2=3$. דרך פשוטה לזכור שלב זה היא להחליף את סימן אי-השיוויון בסימן השיוויון "=".

3. את הפתרונות שקיבלנו נמקם על ציר מספרים שיהווה ייצוג לציר ה-x. בצורה הבאה:

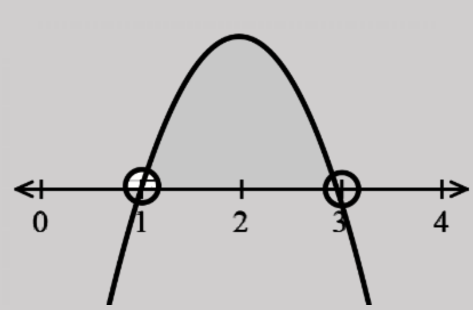


4. נתבונן במקדם של x^2, על פי המקדם נוכל להחליט כיצד לצייר את הפרבולה על הציר שציירנו. כפי שציינו, במידה והמקדם של x^2 שלילי, הפרבולה תהיה "בוכה" ובמידה והוא יהיה חיובי, היא תהיה "מחייכת". במקרה זה, המקדם של x^2 שלילי, ולכן הפרבולה תהיה "בוכה".

5. לאחר שנסווג את סוג הפרבולה, האם היא "בוכה" או "מחייכת", נצייר אותה על ציר המספרים שציירנו קודם לכן, כך:



6. נתבונן באי-שוויון המקורי, ונבין מהו התחום שאנו מחפשים. כלומר, האם אנחנו מחפשים את התחום שבו הביטוי גדול מ-0 או קטן מ-0. בשאלה הנתונה, התחום הרצוי הוא תחום החיוביות של המשוואה. על פי השרטוט, אסמן את החלק שבו הפרבולה שלי נמצאת מעל ציר ה-x.



7. בשלב זה נוכל לפתור את אי השיוון. התחום הרלוונטי לנו הוא התחום האפור בשרטוט הנ"ל ולכן פתרון אי השיוויון הוא $\mathbf{1 < x < 3}$.

דוגמא :

פתור את מערכת אי-השוויונות הבאה : $x^2 + 4x \leq 21$ או $2x^2 - 3 < -5x$

פתרון:

ראשית נפתור את אי-השוויון הימני, אי-שוויון זה הוא אי-שוויון ריבועי, לכן נביא אותו למצב בסיסי :

$$x^2 + 4x \leq 21 \quad /-21$$

$$x^2 + 4x - 21 \leq 0$$

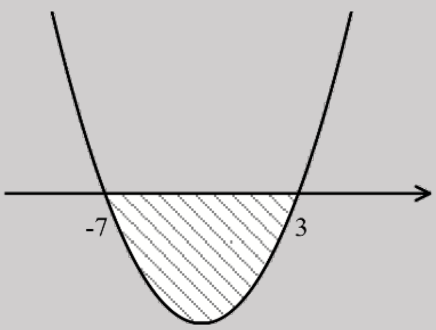
נשתמש בתרגיל עזר : $x^2 + 4x - 21 = 0$, ונפתור אותו בעזרת נוסחת השורשים :

$$x_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 1\cdot(-21)}}{2\cdot 1} = \frac{-4 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-4 + 10}{2} = 3$$

$$x_2 = \frac{-4 - 10}{2} = -7$$

נמקם את שורשי המשוואה על ציר המספרים. נתבונן במקדם של x^2 , נוכל לסווג כך כי הפרבולה ישרה ("מחייכת", כי $a > 0$).לאחר מכן נשרטט סקיצה שלה על ציר המספרים כאשר שורשי המשוואה הם נקודות החיתוך שלה עם הציר. נבדוק מתי הפונקציה שלילית או שווה לאפס :



על פי השרטוט, הפרבולה שלילית או שווה לאפס בתחום שבו $-7 \leq x \leq 3$. כעת נפתור את אי-השוויון השמאלי, אי-שוויון זה הוא אי-שוויון ריבועי גם כן. נביא אותו למצב בסיסי :

$$2x^2 - 3 < -5x \quad /^{+5x}$$

$$2x^2 + 5x - 3 \leq 0$$

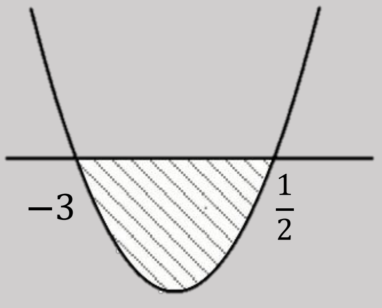
נשתמש בתרגיל העזר: $2x^2 + 5x - 3 = 0$, ונפתור באמצעות הצבה בנוסחת השורשים:

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{5^2 - 4 \cdot 2 \cdot (-3)}}{2 \cdot 2} = \frac{-5 \pm \sqrt{49}}{4}$$

$$x_1 = \frac{-5+7}{4} = \frac{1}{2}$$

$$x_2 = \frac{-5-7}{4} = -3$$

נמקם את שורשי המשוואה על ציר המספרים. נתבונן במקדם של x^2, נוכל לסווג כך כי הפרבולה ישרה ("מחייכת", כי $a > 0$). לאחר מכן נשרטט סקיצה שלה על ציר המספרים כאשר שורשי המשוואה הם נקודות החיתוך שלה עם הציר. נבדוק מתי הפונקציה שלילית או שווה לאפס:



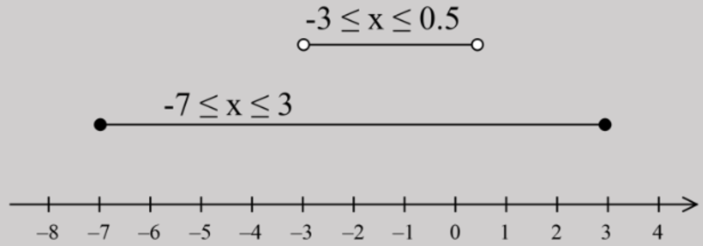
לפי השרטוט הפרבולה שלילית או שווה לאפס בתחום שבו $-3 \leq x \leq 0.5$

נסכם את הפתרונות שמצאנו:

$-3 \leq x \leq 0.5$ **או** $-7 \leq x \leq 3$

נפתור את מערכת אי השיוונות הזו, מסוג "או", נשרטט את שני אי-השוויונות על ציר המספרים על מנת למצוא את הפתרון הסופי.

מבוא לאלגברה אי-שיוויונות



לפי השרטוט התחום שכולל את שני האי-שוויונים הוא $-7 \le x \le 3$

וזהו פתרון אי-השוויון.

שאלות

פתור את אי השיוונות הבאים :

1. $x^2 - 6x + 5 > 0$

2. $2x^2 + 8x < 0$

3. $4x^2 - 12x + 11 < 0$

4. $x^2 + x - 12 > 0$

5. $2x^2 + 6x - 20 > 0$

6. $4x^2 + 51x - 13 < 0$

7. $-6x^2 + 2x + 20 > 0$

8. $13x^2 - 39x - 364 < 0$

9. $-2x^2 - 6x + 108 < 0$

פתור את מערכות אי השיוויונות הבאות :

10. $x^2 - 5x + 4 < 0$ **וגם** $x^2 - 2x < 0$

11. $x^2 - 9x + 18 < 0$ **וגם** $x^2 - 8x + 16 \le 0$

12. $x^2 - 4x + 4 > 0$ **או** $x^2 - 2x + 1 \le 0$

13. $x^2 - 2x - 3 < 0$ **וגם** $-x^2 + 9x - 14 < 0$

14. $-4x^2 + 49x - 12 > 0$ **או** $x^2 + 3x - 10 > 0$

15. $2x^2 - 11x + 15 < 0$ **וגם** $x^2 - 5x + 4 < 0$

תשובות

1	$x < 1$ או $x > 5$	**6**	$-13 < x < \frac{1}{4}$	**11**	$x = 4$
2	$-4 < x < 0$	**7**	$-\frac{5}{3} < x < 2$	**12**	$x < 2$ או $x > 2$
3	אין פתרון	**8**	$-4 < x < 7$	**13**	$-1 < x < 2$
4	$x > 3$ או $x < -4$	**9**	$x < -9$ או $x > 6$	**14**	$\frac{1}{4} < x < 12$ או $x < -5$
5	$x < -5$ או $x > 2$	**10**	$1 < x < 2$	**15**	$\frac{5}{2} < x < 3$

אי-שיווין רציונלי

אי שיוויון רציונלי הוא אי שיוויון שבמכנה שלו יש נעלם או ביטוי עם נעלם ולרוב גם במונה. כיוון שהנעלם נמצא במכנה ואנו לא יודעים האם הוא חיובי או שלילי, לא ניתן להיפטר מהמכנה. זאת מכיוון שבמידה ונכפיל את שני אגפי המשוואה במכנה, לא נוכל לדעת בוודאות את כיוון אי השיווין. על מנת לפתור אי-שיוויון מסוג זה, נעבוד בשיטת "הנחש", על פי השלבים הבאים :

1. נרכז את כל הביטויים ואיברי אי-השיוויון באגף אחד.
2. נבצע מכנה משותף לביטוי שאיתו אנו עובדים, שנמצא באגף המרוכז.
3. נבדוק עבור אילו מספרים המכנה והמונה מתאפסים, כל אחד בנפרד
4. נציג את מאפסי המונה והמכנה על ציר מספרים
5. נציב בביטוי מספרים לפני ואחרי המאפסים, על מנת לראות את החיוביות או השליליות של הביטוי בטווחים אלו
6. נבחר את את התחומים הרלוונטים על פי אי-השיוויון

דוגמא

מצא את תחום ההגדרה של אי-השוויון הבא ופתור אותו: $\frac{x-3}{x^2 -5x +4} < 0$

פתרון:

אין צורך לבצע מכנה משותף או כינוס איברים באי-השיוויון הנתון. לכן נוכל להתחיל בשלב מספר 3, למצוא את מאפסי המונה והמכנה.

מאפס מונה : $x - 3 = 0 \rightarrow x = 3$

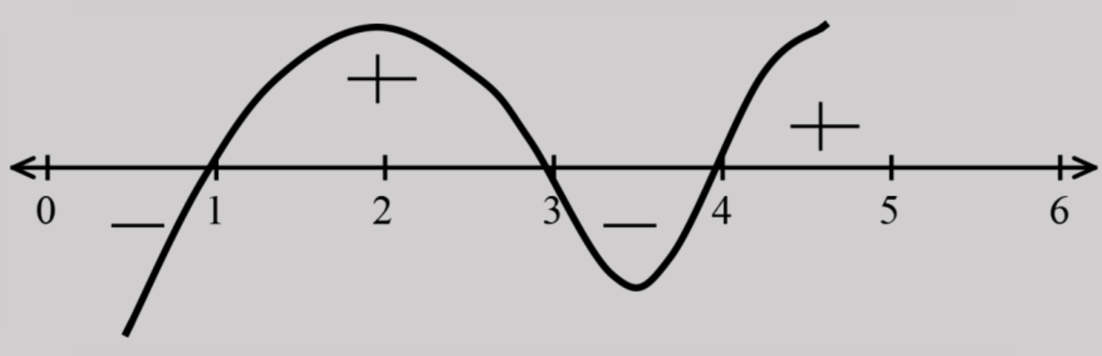
מאפס מכנה : נמצא את שורשי המשוואה הריבועית בעזרת נוסחת השורשים.

$$x_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{5^2 - 4\cdot1\cdot(4)}}{2\cdot1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$x_1 = \frac{-2+4}{6} = \frac{1}{3}$$

$$x_2 = \frac{-2-4}{6} = -1$$

נציג את המאפסים על ציר :



נציב באי השיוון מספרים לפני ואחרי המאפסים :

$$x = 0 \rightarrow -\frac{3}{4} \rightarrow \text{שלילי}$$

$$x = 2 \rightarrow \frac{-1}{-2} \rightarrow \text{חיובי}$$

$$x = 3.5 \rightarrow -\frac{2}{5} \rightarrow \text{שלילי}$$

$$x = 5 \rightarrow \frac{2}{4} \rightarrow \text{חיובי}$$

נוכל לצייר ״נחש״ באי השיוויון בצורה שתשקף את התוצאות שקיבלנו. על פי שרטוט העזר שלנו, נוכל לבחור בכל התחומים החיוביים בציר שבנינו. ולכן הפתרון לאי-השיוויון הוא : $x > 4$ או $1 < x < 3$.

מבוא לאלגברה אי-שיוויונות

שאלות

.1 $\frac{x^2-5x+4}{x-1} < 0$

.2 $\frac{x^2-2x+1}{x-7} \geq 0$

.3 $\frac{x^2-9x+18}{x^2-x-6} \leq 0$

.4 $\frac{x^2-9}{x^2+5x+4} \leq 1$

.5 $\frac{x}{x+5} + \frac{5}{x^2+5x} > \frac{1}{x}$

.6 $\frac{2}{9} < \frac{2x^2+6x+20}{x^2-9} \leq \frac{2}{5}$

.7 $\frac{x^2-6x+16}{3x^2+2x-1} < 0$

.8 $\frac{6x^2+x-1}{-x^2+4x+21} > 0$

.9 $\frac{-x^2+4x+21}{3x^2+12x} \leq 0$

.10 $\frac{2x^2+9x+9}{x^2-12x+32} \geq 0$

.11 $\frac{-6x^2+13x+8}{-x^2+9x-18} \leq 0$

.12 $\frac{5x^2-x-4}{10x^2-13x+4} > 0$

תשובו

1	$x < 1$ או $1 < x < 4$	**5**	$x > 1$ או $x < -5$	**9**	$x < -4\,, -3 \leq x < 0$ $x \geq 7$
2	$x > 7$ או $x = 1$	**6**	אין פתרון	**10**	$x \leq 3, -\frac{3}{2} \leq x < 4$ $x > 8$
3	$3 < x \leq 6$ או $-2 < x < 3$	**7**	$-1 < x < \frac{1}{3}$	**11**	$-\frac{1}{2} \leq x \leq \frac{8}{3}$ או $3 < x < 6$
4	$-4 < x \leq -\frac{13}{5}$ או $x > -1$	**8**	$-3 < x < -\frac{1}{2}$ או $\frac{1}{3} < x < 7$	**12**	$x < -\frac{4}{5}$ או $\frac{1}{2} < x < \frac{4}{5}$ או $x > 1$

שורשי המשוואה הריבועית

למשוואה ריבועית יכולים להיות **שני** שורשים ממשיים, שורש ממשי **אחד** או **אף** שורש ממשי.

מספר פתרונות המשוואות יהיה תלוי בפנים תוכן השורש בנוסחת השורשים, $(b^2 - 4ac)$.

תוכן השורש נקרא "דיסקרימיננטה" (שם שאנחנו לא צריכים לזכור), נסמן אותו באות היוונית "דלתא" $\Delta = b^2 - 4ac$. ה"דלתא" עשויה לעזור לנו להבחין כמה פתרונות יהיו למשוואה מסוימת.

1. במידה ו-$\Delta > 0$, כלומר תוכן פנים השורש במשוואה הריבועית הוא חיובי, **למשוואה הריבועית יהיו שני פתרונות ממשיים**
2. במידה ו-$\Delta = 0$, כלומר תוכן פנים השורש במשוואה הריבועית שווה לאפס, **למשוואה הריבועית יהיה פתרון ממשי אחד**
3. במידה ו-$\Delta < 0$, כלומר תוכן פנים השורש במשוואה ריבועית הוא שלילי, פעולה שלא ניתן לבצע עבור מספרים ממשיים, **למשוואה הריבועית לא יהיה פתרון.**

דוגמא:

עבור המשוואה הבאה, $x^2 + 8x + a$ מצא לאילו ערכי a :

- יש למשוואה שני פתרונות
- יש למשוואה פתרון אחד
- אין למשוואה פתרונות

פתרון :

נבחן את ה"דלתא" של הביטוי הבא : $\Delta = 64 - 4a$

על מנת שיהיו למשוואה שני פתרונות, $\Delta > 0$. כלומר, $64 - 4a > 0$.

$$64 - 4a > 0 \rightarrow 64 > 4a \rightarrow 16 > a$$

כלומר, עבור $a < 16$, יהיו למשוואה **שני פתרונות**

על מנת שיהיה למשוואה פתרון אחד , $\Delta = 0$. כלומר, $64 - 4a = 0$.

מדובר במשוואה עם נעלם אחד, $64 = 4a \rightarrow a = 16$.

עבור $a = 16$ למשוואה יהיה **פתרון אחד**.

על מנת שלא יהיו למשוואה פתרונות, $\Delta < 0$. כלומר, $64 - 4a < 0$.

$$64 - 4a < 0 \rightarrow 64 < 4a \rightarrow 16 < a$$

כלומר, עבור $a > 16$, **לא יהיו** למשוואה פתרונות

שאלות

מצא לגבי המשוואות הבאות, לאילו ערכי m יהיו למשוואה <u>שני</u> פתרונות ממשיים :

1. $x^2 - mx + 36 = 0$

2. $x^2 - mx - 12m = 0$

3. $mx^2 - 2\sqrt{6}x + (m-1) = 0$

4. $x^2 - 4mx + 3m^2$

5. $mx^2 + x(m-1) - (m+2) = 0$

מבוא לאלגברה שורשי המשוואה הריבועית

מצא לגבי המשוואות הבאות, לאילו ערכי m יהיה למשוואה <u>פתרון ממשי אחד</u> :

6. $x^2 - mx + 24m = 0$

7. $-mx^2 - 2x + (m+1) = 0$

8. $(m-1)x^2 - 2\sqrt{35}x + (m+1) = 0$

מצא לגבי המשוואות הבאות לאילו ערכי m <u>לא יהיו</u> למשוואה פתרונות :

9. $(m-1)^2x^2 + (m-1)x + 1$

10. $x^2 - 2m^2x + 8m$

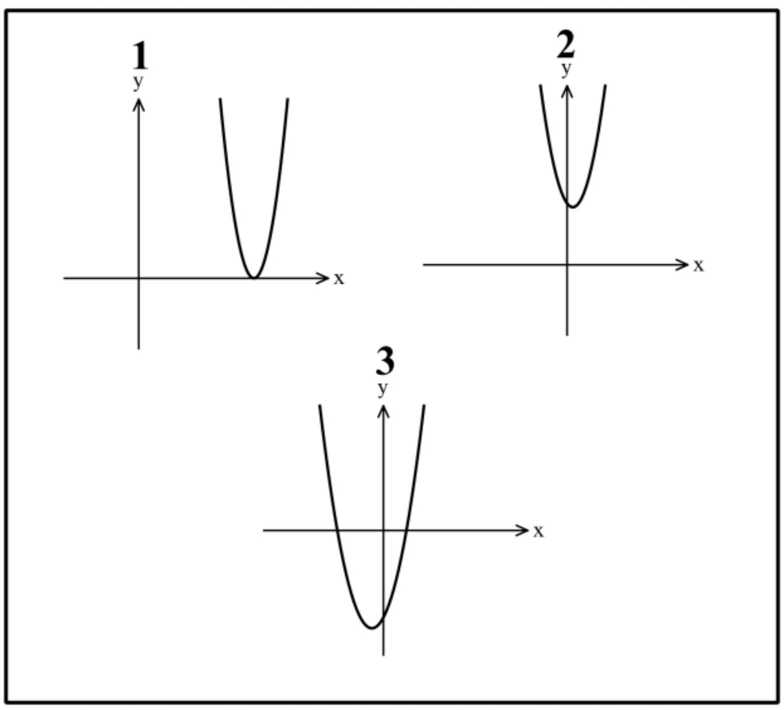
11. $(m-4)x^2 + \sqrt{24}x + (m+1)$

12. נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = x^2 - mx + 4m$. לפנייך שלושה ערכים אפשריים לפרמטר m. מבלי לחקור את הפונקציה קבע איזו סקיצה מתאים לכל אחד מן הערכים :

א. $m = -2$

ב. $m = 16$

ג. $m = 2$



13. מצא לאילו ערכי m אי השוויונות הבאים מתקיימים לכל ערך של x :

א. $x^2 - 4x + m > 0$

ב. $x^2 - 8mx + 6m^2 > 0$

ג. $-x^2 + 4x - m^2 - 7 < 0$

ד. $(m-2)x^2 + 4x + m + 1 > 0$
$m > 2$

תשובות

1	$m < -12$ או $m > 12$	**6**	$m = 0$ או $m = 96$	**11**	$m < -2$ או $m > 5$
2	$m < -48$ או $m > 0$	**7**	אין פתרון	**12**	א = 3, ב = 1 , ג = 2
3	$-2 < m < 3$	**8**	$m = \pm 6$	**13**	א. $m > 4$
4	$m \neq 0$	**9**	אין m המקיים תנאי זה		ב. אין ערך m המקיים תנאי זה
5	$m > -\frac{1}{5}$ או $m < -1$	**10**	$0 < m < 2$		ג. $m > \sqrt{11}$ או $m < -\sqrt{11}$
					ד. $m > 3$

משוואות מיוחדות

בפרק זה נעסוק בשלושה סוגים של משוואות והשיטות שנוכל להיעזר על מנת לפתור משוואות אלו.

הסוג הראשון הוא, **משוואות דו ריבועיות**

עד כה הכרנו משוואות מהצורה הבאה , $ax^2 + bx + c = 0$. את המשוואות האלו ניתן לפתור בעזרת נוסחת השורשים. לעיתים, ניתקל במשוואות מהצורה הבאה :

$$\boldsymbol{ax^4 + bx^2 + c = 0}$$

משוואות אלו מזכירות את המשוואה הריבועית אותה למדנו, אך אין להכניס את איברי המשוואה לנוסחת השורשים כפי שהם. למשוואות מסוג זה קוראים **משוואות דו ריבועיות**. על מנת לפתור משוואות מסוג זה יהיה עלינו "לסדר" אותן בצורה הבאה :

1. נציב $t = x^2$, ולאחר מכן נציב את t במשוואה הדו ריבועית
2. נפתור את המשוואה הריבועית שיצרנו, ונמצא את ערך t בעזרת נוסחת שורשים או טרינום
3. נציב חזרה את כל ערך t שקיבלנו $t = x^2$, ונמצא את ערכי ה-x השונים.

הערה חשובה : שיטת עבודה זו מתאימה למקרים בהם קיים נעלם המועלה בחזקה זוגית, נעלם נוסף המועלה בחזקה הקטנה פי 2 מהחזקה של הנעלם השני ואיבר חופשי. רק במקרים אלו, נוכל לפתור את המשוואות בצורה הזו.

דוגמא:

נפתור את המשוואה הדו-ריבועית הבאה : $x^4 - 5x^2 + 4 = 0$.

<u>פתרון</u>:

נשים לב כי מולנו משוואה דו ריבועית, עם נעלם בחזקה זוגית ← x^4 , נעלם נוסף בחזקה הקטנה פי 2 ← $-5x^2$ ואיבר חופשי. נציב $t = x^2$ במשוואה הדו-ריבועית ונקבל את המשוואה הריבועית הבאה: $t^2 - 5t + 4 = 0$.

נפתור בעזרת <u>נוסחת השורשים</u>:

$$t_{1,2} = \frac{-(-5) \pm \sqrt{(-5)^2 - 4\cdot1\cdot4}}{2\cdot1} = \frac{5 \pm \sqrt{9}}{2}$$

$$t_1 = \frac{5+3}{2} = 4$$

$$t_2 = \frac{5-3}{2} = 1$$

מכיוון שהצבנו $t = x^2$, נציב חזרה את הערכים שמצאנו על מנת למצוא את ערכי x :

עבור $t = 4$:

$x^2 = 4 \quad /\sqrt{}$

$x_1 = 2 \qquad x_2 = -2$

עבור $t = 1$:

$x^2=1 \quad /\sqrt{}$

$x_3=1 \qquad x_4=-1$

פתרונות המשוואה הדו-ריבועית הם:

$x_1=2 \qquad x_2=-2 \qquad x_3=1 \qquad x_4=-1$

מבוא לאלגברה משוואות מיוחדות

שאלות

מצא את השורשים הממשיים של המשוואות הבאות

1. $x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

2. $x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

3. $x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

4. $x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

5. $x^4 - 16x^2 + 64 = 0$

6. $x^8 - 257x^4 + 256 = 0$

7. $9x^4 - 19x^2 + 2 = 0$

8. $x^6 - 24x^3 - 81 = 0$

9. $x^{10} - 242x^5 - 243 = 0$

הסוג השני הוא, **משוואות אי רציונליות**

משוואות אי-רציונליות הן משוואות שבהם הנעלם מופיע בתוך שורש. לעיתים, יהיה נעלם רק בתוך שורש ולעיתים יהיו גם נעלמים בפנים ומחוץ לשורש. מכיוון ששורש היא הפעולה ההפוכה לחזקה, על מנת לפתור משוואות אלו **נעלה בריבוע** את שני אגפי המשוואה וכך נקבל משוואה ללא שורש ריבועי.

<u>הערות:</u>

- לפני שאנו פותרים משוואות אלו, עלינו לקבוע את תחום ההגדרה של המשוואות. יש לזכור כי ביטוי בתוך שורש תמיד יהיה גדול או שווה לאפס.
- ההעלאה בריבוע עלולה להוביל לתוצאה שאינה מקיימת את המשוואה המקורית. דוגמא פשוטה לכך היא המשוואה הבאה, $x = 2$. במידה ונעלה את שני אגפי המשוואה בריבוע, נקבל את המשוואה החדשה הזו: $x^2 = 4$.

  כעת, על מנת לבודד את הנעלם, נוציא שורש משני אגפי המשוואה ונקבל את התשובות הבאות: $x = 2$, $x = -2$. שימו לב שנוסף פתרון חדש שאינו מקיים את המשוואה המקורית.

  לכן, **תמיד** אחרי שנעלה בריבוע משוואה אי-רציונלית, נבדוק את התשובות שקיבלנו במשוואה **טרם ההעלאה בריבוע.**

שלבי עבודה

1. נשתדל לבודד באגף אחד את הביטוי שנמצא בתוך השורש על מנת להקל בעת ההעלאה בריבוע. במידה ולא נוכל, יש לזכור את חוקי הכפל המקוצר בעת העלאה בריבוע.
2. נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה ונפתור את המשוואה
3. נבדוק חזרה במשוואה המקורית את פתרון המשוואה שמצאנו

דוגמא 1 :

נפתור את המשוואה הבאה : $x-5=\sqrt{2x-10}$

פתרון :

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה ונקבל : $(x-5)^2=\left(\sqrt{2x-10}\right)^2$

פעולת ההעלאה בריבוע על שורש ריבועי מבטלת את השורש ולכן נקבל :

$$x^2-10x+25=2x-10$$

נעביר אגפים כך שנקבל את המשוואה הריבועית הבאה : $x^2-12x+35=0$.

פתרונות המשוואה הנ"ל הם $x=5$ ו- $x=7$, כעת רק נותר להציבם במשוואה המקורית בשביל לבדוק שאכן מקיימים אותה :

עבור $x=5$:

$$5-5=\sqrt{2\cdot5-10}$$

$$0=0$$

קיבלנו פסוק אמת ולכן **פתרון זה הוא נכון.**

$x = 7$:

$$7 - 5 = \sqrt{2\cdot 7 - 10}$$

$$2 = 2$$

קיבלנו פסוק אמת ולכן **פתרון זה הוא נכון.**

דוגמא 2 :

נפתור את המשוואה הבאה: $1 = \sqrt{x+7} + \sqrt{x-7}$

פתרון:

נבחן את תחום ההגדרה של המשוואה:

פנים השורש חייב להיות <u>אי שלילי</u> ולכן: $x - 7 \geq 0$ וגם $x + 7 \geq 0$.

פתרון מערכת אי השיוויון הנ״ל היא $x \geq 7$ וזהו **תחום ההגדרה של המשוואה.**

נעלה בריבוע את שני אגפי המשוואה, תוך שמירה על חוקי הכפל המקוצר ונקבל:

$$1=(x+7)+2*\sqrt{x+7} * \sqrt{x-7} + (x-7)$$

נסדר את המשוואה שקיבלנו, על פי חוקי שורשים ונכנס איברים:

$$1=(x+7)+2*\sqrt{x+7} * \sqrt{x-7} + (x-7) \rightarrow 1 - 2x = 2\sqrt{(x-7)(x+7)}$$

נעלה בריבוע בשנית את שני אגפי המשוואה, תוך שמירה על חוקי הכפל המקוצר ונקבל:

$$(1-2x)^2 = 4(x-7)(x+7) \rightarrow \ 4x^2 - 4x + 1 = 4x^2 - 196$$

$$-4x = -197 \rightarrow \ x = 49\frac{1}{4}$$

מצאנו כי למשוואה פתרון אחד הנמצא בתחום ההגדרה, עלינו לבחון האם הוא מקיים

את המשוואה טרם ההעלאה בריבוע:

$$1 = \sqrt{49.25 + 7} + \sqrt{49.25 - 7}$$

$$1 = 14$$

קיבלנו פסוק שקר ולכן **פתרון זה אינו נכון**, אין פתרון המקיים את המשוואה הנ״ל.

שאלות

10. $\sqrt{4x+8}=12$

11. $-9+\sqrt{3x+9}=0$

12. $\sqrt{12x^2-4x+24}=6x-4$

13. $\sqrt{6x-5}-\sqrt{2x+3}=0$

14. $\sqrt{x-5}-\sqrt{x+2}=-1$

15. $\sqrt{x^2+4}-\sqrt{x^2-2}=2$

16. $\sqrt{12x+24}-\sqrt{4x-36}=\sqrt{12x-20}$

17. $\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}=5$

18. $\sqrt{x^2-8}+\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x^2+8}$

19. $\sqrt{2x^2-18}-\sqrt{x^2+9}=0$

20. $\sqrt{x-3}-3=\sqrt{x}$

21. $\sqrt{x^2+2x-3}=2x+6$

הסוג השלישי והאחרון הוא משוואות שאינן דו ריבועיות אך גם נפתרות בהצבה. ישנן סוגי משוואות הניתנות לפתרון על ידי הצבת נעלם אחר, המקל על פתרון התרגיל בצורה משמעותית ויעילה. **נושא זה אינו שכיח ורלוונטי לבחינה ברמת חמש יחידות בלבד.**

דוגמא : נפתור את המשוואה הבאה : $(4x^4-20x^3+25x^2)-5(2x^2-5x)+6=0$

פתרון:

נתבונן בביטוי $4x^4-20x^3+25x^2$. במידה ונסתכל על האיברים, נוכל לנסות ולזהות תבנית של כפל מקוצר. כלומר, במידה ו- $a=2x^2$ ו- $b=5x$, אוכל לבדוק האם הביטוי הנ"ל הוא הרחבה של כפל מקוצר כך :

$$(2x^2-5x)^2=4x^4-20x^3+25x^2$$

נסדר מחדש את המשוואה כך :

$$\left(2x^2-5x\right)^2-5(2x^2-5x)+6=0$$

בשלב זה, קיים ביטוי החוזר על עצמו פעמיים במשוואה הנ"ל, לכן נוכל להציב במשוואה

$t=2x^2-5x$ וכך לקבל את המשוואה הריבועית הבאה: $t^2-5t+6=0$.

פתרונות המשוואה הריבועית הם: $t_1=2$ ו- $t_2=3$.

בשלב זה, נציב את הפתרונות שמצאתי בביטוי המקורי:

עבור $t=2$:

$$2=2x^2-5x \xrightarrow{-2} 0=2x^2-5x-2$$

פתרונות המשוואה הריבועית הם: $x_1=4$ ו- $x_2=\frac{1}{2}$

עבור $t=3$:

$$3=2x^2-5x \xrightarrow{-3} 0=2x^2-5x-3$$

פתרונות המשוואה הריבועית הם: $x_3=2$ ו- $x_4=3$.

לכן, פתרונות המשוואה הם:

$$x_1=4 \qquad x_2=\frac{1}{2} \qquad x_3=2 \qquad x_4=3$$

לסיכום, לעיתים נתקל במשוואות אשר נתקשה לפתור באמצעות פתיחת סוגריים וכינוס איברים. במידה ונתקל במשוואה כזו, ננסה להבחין האם קיים ביטוי שחוזר על עצמו יותר מפעם אחת במשוואה, במידה ולא, האם נוכל לנסות לכנס איברים בעזרת הוצאת גורם משותף, טרינום או כפל מקוצר על מנת לחדד עבורנו את הביטוי החוזר.

מבוא לאלגברה משוואות מיוחדות

שאלות

22. $(x^2+x)^2-14(x^2+x)+24=0$

23. $(x^2+4x)^2-17(x^2+4x)+60=0$

24. $(x^2+7x+9)^2-6(x^2+7x+9)=-9$

25. $(x^2-3x)^2-8(x-2)(x-1)-30=-26$

26. $2(x+1)(x-5)(x-2)^2+3=-13$

27. $(2x^2+4x)(x^2+2x-7)=16$

28. $(x+2)(x-3)x(x-1)=72$

29. $\frac{x^2-3x}{(x-2)(x-1)}+\frac{(x-4)(x+1)}{(x-5)(x+2)}=\frac{34}{15}$

תשובות

1	$x=5, x=-5$ $x=1, x=-1$	**11**	$x=24$	**21**	$x=3$
2	$x=\pm\sqrt{5}$	**12**	$x=2$	**22**	$x=3, x=1, x=-2$ $x=-4$
3	$x=3, x=-3$ $x=4, x=-4$	**13**	$x=2$	**23**	$x=2, x=1, x=-5$ $x=-6$
4	$x=2, x=1$	**14**	$x=14$	**24**	$x=-1, x=-6$
5	$x=\pm 2\sqrt{2}$	**15**	$x=\frac{-3}{2}, x=\frac{3}{2}$	**25**	$x=1, x=2$ $x=5, x=-2$
6	$x=4, x=-4$ $x=1, x=-1$	**16**	$x=10$	**26**	$x=2+2\sqrt{2}, x=2-2\sqrt{2}$ $x=3, x=1$
7	$x=\sqrt{2}, x=-\sqrt{2}$ $x=\frac{1}{3}, x=-\frac{1}{3}$	**17**	$x=16$	**27**	$x=2, x=-1, x=-4$
8	$x=3, x=-\sqrt[3]{3}$	**18**	$x=\pm\sqrt{10}$	**28**	$x=4, x=-3$
9	$x=-1, x=3$	**19**	$x=\pm 3\sqrt{3}$	**29**	$x=7, x=-4$
10	$x=34$	**20**	אין פתרון		

$4x + 16 = 4(x+4)$

$10 - 4a = 2(5-2a)$

$8xy - 48x = 8x(y-6)$

$6 + 24a - 18b = 6(1+4a-3b)$

$12a^2 + 20a + 36ab = 4a(3a+5+9b)$

$-2x - 10 = -2(x+5)$

$-3 + 12a = 3(-1+4a)$

$7b - 21a = 7(b-3a)$

$6a - 30ab = 6a(1-5b)$

$-2 + 42x - 6b = -2(1-21x+3b)$

$10xy - 15y - 20x = 5(2xy-3y-4x)$

$2x^2 + x = x(2x+1)$

$5x + 2x^3 = x(5+2x^2)$

$6b^2 + 2b^3 = 2b^2(3+b)$

$y^3x^4 - y^5x^3 = y^3x^3(x-y^2)$

$2c^3 + c^6 + c^2 = c^2(2c+c^4+1)$

$6x^5 + 9x^3 + 12x^6 = 3x^3(2x^2+3+4x^3)$

$ay^2 + 3aby^3 = ay^2(1+3by)$

$$(x+5)\cdot(x+4) = x^2+4x+5x+20 = x^2+9x+20$$

$$(x+2)\cdot(x+10) = x^2+10x+2x+20 = x^2+12x+20$$

$$(x+1)\cdot(x-5) = x^2-5x+x-5 = x^2-4x-5$$

$$(2x-3)\cdot(x-6) = 2x^2-12x-3x+18 = 2x^2-15x+18$$

$$(3-a)\cdot(a+4) = 3a+12-a^2-4a = -a^2-a+12$$

$$(3-y)\cdot(y-3) = 3y-9-y^2+3y = -y^2+6y-9$$

$$(3x-1)\cdot(2x+5) = 6x^2+15x-2x-5 = 6x^2-13x-5$$

$$(a+b)\cdot(a+2) = a^2+2a+ab+2b$$

$(2x+3)^2 = 4x^2 + 2\cdot 2x\cdot 3 + 9 = 4x^2 + 12x + 9$

$(3x-5)^2 = 9x^2 + 2\cdot 3\cdot(-5) + (-5)^2 = 9x^2 - 30x + 25$

$(2a+2b)^2 = 4a^2 + 2\cdot 2a\cdot 2b + 4b^2 = 4a^2 + 8ab + 4b^2$

$(2a+9)\cdot(2a-9) = 4a^2 - 18a + 18a - 81 = 4a^2 - 81$

$(7-3r)^2 = 49 - 2\cdot 7\cdot 3r + (-3r)^2 = 49 - 42r + 9r^2$

$(10+2y)\cdot(10-2y) = 10^2 - (2y)^2 = 100 - 4y^2$

$(2x+3y)^2 = 4x^2 + 2\cdot 2x\cdot 3y + 9y^2 = 4x^2 + 12xy + 9y^2$

$(a+4b)\cdot(a-4b) = a^2 - (4b)^2 = a^2 - 16b^2$

$x^2 \boxed{+} 12x \boxed{+} 36 = (x + 6)^2 = x^2 + 2\cdot 6\cdot x + 6^2 = x^2 + 12x + 36$

$x^2 - 81 = (x \boxed{+} 9)\cdot(x \boxed{-} 9) = x^2 + 9x - 9x - 81 = x^2 - 81$

$9m^2 \boxed{+} 30m \boxed{+} 25 = (3m + 5)^2 = 9m^2 + 2\cdot 3m\cdot 5 + 25 = 9m^2 + 30m + 25$

$(n-1)^2 = n^2 \boxed{-} 2n \boxed{+} 1 = n^2 - 2n + 1$

$(s+r)\cdot(s-r) = s^2 \boxed{-} r^2 = s^2 - r^2$

$(2n \boxed{+} 3)^2 = 4n^2 + 12n \boxed{+} 9$ $\quad (2n)^2 + 2\cdot 2n\cdot 3 + 3^2 = 4n^2 + 12n + 9$

$x^2 + 20x + 100 = (x + \boxed{10})^2$ $\quad 2ab = 20x,\ a = x \Rightarrow b = 10$

$x^2 - 14x + \boxed{49} = (x - \boxed{7})^2$ $\quad 2ab = 14x,\ a = x \Rightarrow b = 7$

$(x-8)^2 = x^2 - \boxed{16} + 64$ $\quad x^2 - 2\cdot x\cdot 8 + 64 = x^2 - 16x + 64$

$(m + \boxed{r})\cdot(\boxed{m} - r) = m^2 - r^2$ $\quad$ נוסחת כפל מקוצר

$(\boxed{s} + p)^2 = s^2 + \boxed{2sp} + \boxed{p^2}$ $\quad (s+p)^2 = s^2 + 2sp + p^2$

$(x + \boxed{2y})^2 = x^2 + \boxed{4xy} + 4y^2$ $\quad b^2 = 4y^2 \Rightarrow b = 2y$

$x^2 - 10x + 25$ $\quad a^2 = x^2 \Rightarrow a = x \;,\; b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \Rightarrow (x-5)^2$

$x^2 + 20x + 100$ $\quad a^2 = x \Rightarrow a = x \;,\; b^2 = 100 \Rightarrow b = 10 \Rightarrow (x+10)^2$

$a^2 - 64$ $\quad (a+8)\cdot(a-8)$ נוסחת כפל מקוצר

$49 + 14x + x^2$ $\quad a^2 = 49 \Rightarrow a = 7 \;,\; b^2 = x^2 \Rightarrow b = x \Rightarrow (7+x)^2$

$4r^2 - 9$ $\quad = (2r-3)\cdot(2r+3)$ נוסחת כפל מקוצר

$16x^2 + 40x + 25$ $\quad a^2 = 16x^2 \Rightarrow a = 4x \;,\; b^2 = 25 \Rightarrow b = 5 \quad (4x+5)^2$

$m^2 + 2mn + n^2$ $\quad = (m+n)^2$ נוסחת כפל מקוצר (כמו בהגדרה)

$36 - 24x + 4x^2$ $\quad a^2 = 36 \Rightarrow a = 6 \;,\; b^2 = 4x^2 \Rightarrow b = 2x \quad (6-2x)^2$

$16x^2 - 9y^2$ $\quad (4x+3y)\cdot(4x-3y)$ נוסחת כפל מקוצר

$25x^2 - 30xy + 9y^2$ $\quad a^2 = 25x^2 \Rightarrow a = 5x \;,\; b^2 = 9y^2 \Rightarrow b = 3y \quad (5x-3y)^2$

$x^2 - 4y^2$ $\quad (x+2y)\cdot(x-2y)$ נוסחת כפל מקוצר

$9n^2 + 24mn + 16m^2$ $\quad a^2 = 9n^2 \Rightarrow a = 3n \;,\; b^2 = 16m^2 \Rightarrow b = 4m \quad (3n+4m)^2$

$x^2 + 8x + 15$

$\underline{a} \cdot \underline{c} = 15$

$\underline{a} + \underline{c} = 8$ $\Rightarrow$ $a = 3$, $c = 5$ $\boxed{(x+3)\cdot(x+5)}$

$2x^2 + 11x + 14$

$a = 2$, $b = 11$, $c = 14$

$a \cdot c = 28$

$7 \cdot 4 = 28$ לכן נבחר את הצמד 7, 4 מכיוון ש

$7 + 4 = 11$

$2x^2 + 4x + 7x + 14 = 2x(x+2) + 7(x+2) = \boxed{(x+2)(2x+7)}$

$3x^2 - 2x - 8$

$a = 3$, $b = -2$, $c = -8$

$a \cdot c = 3 \cdot (-8) = -24$

$a + c = -2$

לכן נבחר את $-6, 4$

$3x^2 - 6x + 4x - 8 = 3x(x-2) + 4(x-2) = \boxed{(x-2)(3x+4)}$

$2x^2 + 9x - 18$

$a = 2$, $b = 9$, $c = -18$

$a \cdot c = -36$

$a + c = 9$

לכן נבחר את $12, -3$

$2x^2 + 12x - 3x - 18 = 2x(x+6) - 3(x+6) = \boxed{(x+6)(2x-3)}$

$2x^2 + 11x + 5$

$a = 2$, $b = 11$, $c = 5$

$a \cdot c = 10$

$a + c = 11$

לכן נבחר את 1, 10

$2x^2 + 10x + x + 5 = 2x(x+5) + x+5 = \boxed{(x+5)(2x+1)}$

$4x^2 + 17x + 15$

$a = 4$, $b = 17$ $c = 15$

$a \cdot c = 60$

$a + c = 17$

נבחר את 12, 5

$4x^2 + 12x + 5x + 15 = 4x(x+3) + 5(x+3) = \boxed{(x+3)(4x+5)}$

$$\frac{2x+3}{12} \qquad 36 = 12 \cdot 3 \Rightarrow \frac{3(2x+3)}{12 \cdot 3} = \boxed{\frac{6x+9}{36}}$$

$$\frac{a+b}{6} \qquad 36 = 6 \cdot 6 \Rightarrow \frac{6 \cdot (a+b)}{6 \cdot 6} = \boxed{\frac{6a+6b}{36}}$$

$$\frac{x-5}{18} \qquad 36 = 18 \cdot 2 \Rightarrow \frac{2(x-5)}{2 \cdot 18} = \boxed{\frac{2x-10}{36}}$$

$$\frac{2a-b+1}{3} \qquad 36 = 3 \cdot 12 \Rightarrow \frac{12(2a-b+1)}{12 \cdot 3} = \boxed{\frac{24a-12b+12}{36}}$$

$$\frac{15}{x-4} \qquad 30 = 15 \cdot 2 \Rightarrow \frac{15 \cdot 2}{2(x-4)} = \boxed{\frac{30}{2x-8}}$$

$$\frac{3}{1-2x} \qquad 30 = 3 \cdot 10 \Rightarrow \frac{3 \cdot 10}{10(1-2x)} = \boxed{\frac{30}{10-20x}}$$

$$\frac{10}{2x-y} \qquad 30 = 10 \cdot 3 \Rightarrow \frac{10 \cdot 3}{3(2x-y)} = \boxed{\frac{30}{6x-3y}}$$

$$\frac{6}{a+2b-3} \qquad 30 = 6 \cdot 5 \Rightarrow \frac{6 \cdot 5}{5(a+2b-3)} = \boxed{\frac{30}{5a+10b-15}}$$

$$\frac{x}{3} = \frac{a \cdot x}{a \cdot 3} = \boxed{\frac{ax}{3a}}$$

$$\frac{2}{4+5x} = \frac{a \cdot 2}{a(4+5x)} = \boxed{\frac{2a}{4a+5ax}}$$

$$\frac{x}{x-6} = \frac{a \cdot x}{a(x-6)} = \frac{ax}{ax-6a}$$

$$\frac{b+1}{1-2c} = \frac{a(b+1)}{(1-2c) \cdot a} = \frac{ab+a}{a-2ac}$$

$$\frac{5}{x-6} = \frac{15}{\quad} \qquad 15 = 5 \cdot 3 \Rightarrow \frac{5}{x-6} = \frac{15}{3(x-6)} = \frac{15}{3x-18}$$

$$\frac{7x+2}{9} = \frac{\quad}{27} \qquad 27 = 9 \cdot 3 \Rightarrow \frac{7x+2}{9} = \frac{3(7x+2)}{27} = \frac{21x+6}{27}$$

$$\frac{11}{x+y} = \frac{110}{\quad} \qquad 110 = 11 \cdot 10 \Rightarrow \frac{11}{x+y} = \frac{110}{10(x+y)} = \frac{110}{10x+10y}$$

$$\frac{3x+1}{2} = \frac{\quad}{2a} \qquad 2a = 2 \cdot a \Rightarrow \frac{3x+1}{2} = \frac{a(3x+1)}{2a} = \frac{3ax+a}{2a}$$

$$\frac{3}{a+2} = \frac{\quad}{6a+12} \qquad 6a+12 = 6(a+2) \Rightarrow \frac{3}{a+2} = \frac{18}{6a+12}$$

$$\frac{2}{3} = \frac{2x+2}{\quad} \qquad 2x+2 = 2(x+1) \Rightarrow \frac{2}{3} = \frac{2(x+1)}{3(x+1)} = \frac{2x+2}{3x+3}$$

$$\frac{2a-5}{a+3} = \frac{\quad}{3a+9} \qquad 3a+9 = 3(a+3) \Rightarrow \frac{2a-5}{a+3} = \frac{3(2a-5)}{3a+9} = \frac{6a-15}{3a+9}$$

$$\frac{8-x}{8+x} = \frac{\quad}{8y+xy} \qquad 8y+xy = y(8+x) \Rightarrow \frac{8-x}{8+x} = \frac{y(8-x)}{8y+xy} = \frac{8y-xy}{8y+xy}$$

$$\frac{5x+15}{5} = \frac{5(x+3)}{5} = \boxed{x+3}$$

$$\frac{2}{6a+18} = \frac{2\cdot 1}{2(3a+9)} = \boxed{\frac{1}{3a+9}}$$

$$\frac{2a}{3a^2-a} = \frac{a\cdot 2}{a(3a-1)} = \boxed{\frac{2}{3a-1}}$$

$$\frac{b-2}{3b-6} = \frac{(b-2)\cdot 1}{(b-2)\cdot 3} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x^2+2xy+y^2}{x+y} = \frac{(x+y)^2}{(x+y)} = \boxed{(x+y)}$$

$$\frac{21}{42-7x} = \frac{7\cdot 3}{7(6-x)} = \boxed{\frac{3}{6-x}}$$

$$\frac{3a^2b}{6ab} = \frac{3ab\cdot a}{2\cdot 3ab} = \boxed{\frac{a}{2}}$$

$$\frac{4-2x}{x-2} = \frac{2(2-x)}{-1(x-2)} = \boxed{-2}$$

$$\frac{2x-3}{9-6x} \quad \frac{2x-3}{-3(2x-3)} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{3-3b}{4b-4} \quad \frac{3(1-b)}{-4(1-b)} = \boxed{\frac{-3}{4}}$$

$$\frac{2-b}{3b-6} = \frac{2-b}{-3(2-b)} = \boxed{-\frac{1}{3}}$$

$$\frac{x-y}{y-x} = \frac{x-y}{-1(x-y)} = \boxed{-1}$$

$$\frac{5y-2xy}{15-6x} = \frac{y(5-2x)}{3(5-2x)} = \boxed{\frac{y}{3}}$$

$$\frac{2xy^2+4xy}{5x^2y+10xy} = \frac{2xy(y+2)}{5xy(x+2)} = \boxed{\frac{2y+4}{5x+10}}$$

$$\frac{x^2+8x}{x+8} = \frac{x(x+8)}{x+8} = \boxed{x}$$

$$\frac{a^2-7a}{a-7} = \frac{a(a-7)}{a-7} = \boxed{a}$$

$$\frac{a-2}{3a^4-6a^3} = \frac{a-2}{3a^3(a-2)} = \boxed{\frac{1}{3a^3}}$$

$$\frac{x^2-49}{x-7} = \frac{(x-7)(x+7)}{(x-7)} = \boxed{x+7}$$

$$\frac{ax^3-5x^3}{3ab^2-15b^2} = \frac{x^3(a-5)}{3b^2(a-5)} = \boxed{\frac{x^3}{3b^2}}$$

$$\frac{x^2-5x}{5-x} = \frac{x(x-5)}{-1(x-5)} = \boxed{-x}$$

$$\frac{10ab-ab^2}{b-10} = \frac{ab(10-b)}{-1(10-b)} = \boxed{-ab}$$

$$\frac{64-48m+9m^2}{(8-3m)^2} = \frac{(8-3m)^2}{(8-3m)^2} = \boxed{1}$$

$$\frac{2ab-5b}{20-8a} = \frac{b(2a-5)}{-4(2a-5)} = \boxed{\frac{b}{-4}}$$

$$\frac{x^2-10x+25}{x-5} = \frac{(x-5)^2}{x-5} = \boxed{x-5}$$

$$\frac{ab^2+ab^3}{b+1} = \frac{ab^2(1+b)}{b+1} = \boxed{ab^2}$$

$$\frac{9a-6}{3ab-2b} = \frac{3(3a-2)}{b(3a-2)} = \boxed{\frac{3}{b}}$$

$$\frac{9n^2+30n+25}{3n+5} = \frac{(3n+5)^2}{3n+5} = \boxed{3n+5}$$

$$\frac{2a-7b}{7b-2a} = \frac{2a-7b}{-1(2a-7b)} = \frac{1}{-1} = \boxed{-1}$$

$$\frac{9x^2+42xy+49y^2}{6x+14y} = \frac{(3x+7y)^2}{2(3x+7y)} = \boxed{\frac{(3x+7y)}{2}}$$

$3^9 \cdot 3^3 = 3^{9+3} = \boxed{3^{12}}$

$3^x \cdot 3^{4x} = 3^{x+4x} = \boxed{3^{5x}}$

$\frac{7^{13}}{7^6} = 7^{13-6} = \boxed{7^7}$

$\frac{8^x}{8^{x-6}} = 8^{x-(x-6)} = \boxed{8^6}$

$2^x \cdot 2^{6-x} = 2^{x+(6-x)} = \boxed{2^6}$

$\frac{7^x}{7^3} = \boxed{7^{x-3}}$

$\frac{5^{3x}}{5^x \cdot 5^6} = \frac{5^{3x}}{5^{x+6}} = 5^{3x-(x+6)} = \boxed{5^{2x-6}}$

$\frac{12^{13}}{12^3} = 12^{13-3} = \boxed{12^{10}}$

$4^{3x} \cdot 4^{13-3x} = 4^{3x+(13-3x)} = \boxed{4^{13}}$

$\frac{13^{2x} \cdot 13^6}{13^x \cdot 13^3} = \frac{13^{2x+6}}{13^{x+3}} = 13^{2x+6-(x+3)} = \boxed{13^{x+3}}$

$(5x)^2 = 5^2 \cdot x^2 = \boxed{25x^2}$

$$(x^2)^6 = x^{2\cdot 6} = \boxed{x^{12}}$$

$$\left(\frac{1}{4}\right)^3 = \frac{1^3}{4^3} = \boxed{\frac{1}{64}}$$

$$\frac{(x+5)^4}{x+5} = \frac{(x+5)^4}{(x+5)^1} = (x+5)^{4-1} = \boxed{(x+5)^3}$$

$$\left(\frac{3x}{7}\right)^2 = \frac{3^2x^2}{7^2} = \boxed{\frac{9x^2}{49}}$$

$$(5x^2y)^2 \qquad 5^2\cdot x^{2\cdot 2}\cdot y^2 = \boxed{25x^4y^2}$$

$$\left(\frac{x^5}{y}\right)^2 = \frac{x^{5\cdot 2}}{y^2} = \boxed{\frac{x^{10}}{y^2}}$$

$$(x^x)^x = x^{x\cdot x} = \boxed{x^{x^2}}$$

$$(4x^x)^y = 4^y\cdot x^{x\cdot y} = \boxed{4^y\cdot x^{xy}}$$

$$\left(\frac{2}{x^5}\right)^3\cdot\left(\frac{x^4}{2}\right)^4 \qquad \frac{2^3}{x^{5\cdot 3}}\cdot\frac{x^{4\cdot 4}}{2^4} = \frac{2^3}{2^4}\cdot\frac{x^{16}}{x^{15}} = 2^{3-4}\cdot x^{16-15}$$

$$= 2^{-1}\cdot x = \boxed{\frac{x}{2}}$$

$4^{-2} = \frac{1}{4^2} = \boxed{\frac{1}{16}}$

$3^{-4} = \frac{1}{3^4} = \boxed{\frac{1}{81}}$

$x^{-3} = \boxed{\frac{1}{x^3}}$

$\left(\frac{3}{8}\right)^{-5} = \frac{3^{-5}}{8^{-5}} = \boxed{\frac{8^5}{3^5}}$

$\left(\frac{a}{4}\right)^{-7} = \frac{a^{-7}}{4^{-7}} = \boxed{\frac{4^7}{a^7}}$

$a^{-2b} = \boxed{\frac{1}{a^{2b}}}$

$(-2)^{-6} = \frac{1}{(-2)^6} = \boxed{\frac{1}{2^6}}$

$\left(\frac{1}{4}\right)^{-2} = \frac{1^{-2}}{4^{-2}} = 4^2 = \boxed{16}$

$a^1 = \boxed{a}$

$1^{-32} = \boxed{1}$

$13^0 = \boxed{1}$

$0^1 = \boxed{0}$

$\left(\frac{13}{15}\right)^1 = \frac{13^1}{15^1} = \boxed{\frac{13}{15}}$

$\left(\frac{x}{y}\right)^0 = \frac{x^0}{y^0} = \boxed{1}$

$1^0 = \boxed{1}$

$0^7 = \boxed{0}$

$\sqrt[6]{6^9} = 6^{\frac{9}{6}} = \boxed{6^{\frac{3}{2}}}$

$\sqrt{7^3} = \boxed{7^{\frac{3}{2}}}$

$\sqrt[5]{2^3} = \boxed{2^{\frac{3}{5}}}$

$\sqrt{7^2} = 7^{\frac{2}{2}} = 7^1 = \boxed{7}$

$\sqrt[z]{x^y} = \boxed{x^{\frac{y}{z}}}$

$\sqrt[4]{12^{2x}} = 12^{\frac{2x}{4}} = \boxed{12^{\frac{x}{2}}}$

$$x^{\frac{3}{y}} = \boxed{\sqrt[y]{x^3}}$$

$$3^{\frac{2}{5}} = \sqrt[5]{3^2} = \boxed{\sqrt[5]{9}}$$

$$7^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{7^2} = \boxed{\sqrt[3]{49}}$$

$$4^{\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^1} = 2$$

$$23^{\frac{8}{8}} = 23^1 = \boxed{23}$$

$$12^{\frac{1}{7}} = \boxed{\sqrt[7]{12}}$$

$$\sqrt{27} = \sqrt{9 \cdot 3} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{3} = \boxed{3\sqrt{3}}$$

$$\sqrt[4]{32} = \sqrt[4]{16 \cdot 2} = \sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[4]{2} = \boxed{2 \cdot \sqrt[4]{2}}$$

$$\sqrt{54} = \sqrt{9 \cdot 6} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{6} = \boxed{3 \cdot \sqrt{6}}$$

$$\sqrt{9x} = \sqrt{9} \cdot \sqrt{x} = \boxed{3\sqrt{x}}$$

$$\sqrt{\frac{a}{4}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{4}} = \boxed{\frac{\sqrt{a}}{2}}$$

$$\sqrt[4]{\frac{x^8}{y^{12}}} = \frac{\sqrt[4]{x^8}}{\sqrt[4]{y^{12}}} = \frac{x^{\frac{8}{4}}}{y^{\frac{12}{4}}} = \boxed{\frac{x^2}{y^3}}$$

$$\sqrt{\frac{25}{36}} = \frac{\sqrt{25}}{\sqrt{36}} = \boxed{\frac{5}{6}}$$

$$\frac{\sqrt{200}}{10} = \frac{\sqrt{100 \cdot 2}}{10} = \frac{\sqrt{100} \cdot \sqrt{2}}{10} = \frac{10 \cdot \sqrt{2}}{10} = \boxed{\sqrt{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{16}}{2} = \frac{\sqrt[3]{2^4}}{2} = \frac{2^{\frac{4}{3}}}{2} = 2^{\frac{4}{3} - 1} = 2^{\frac{1}{3}} = \boxed{\sqrt[3]{2}}$$

$$\frac{\sqrt[3]{2000}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{1000 \cdot 2}}{\sqrt[3]{2}} = \frac{\sqrt[3]{1000} \cdot \cancel{\sqrt[3]{2}}}{\cancel{\sqrt[3]{2}}} = \boxed{10}$$

$$\frac{\sqrt[3]{500}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{125 \cdot 4}}{\sqrt[3]{4}} = \frac{\sqrt[3]{125} \cdot \cancel{\sqrt[3]{4}}}{\cancel{\sqrt[3]{4}}} = \sqrt[3]{125} = \boxed{5}$$

$$\frac{\sqrt{98}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{49 \cdot 2}}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{49} \cdot \cancel{\sqrt{2}}}{\cancel{\sqrt{2}}} = \sqrt{49} = \boxed{7}$$

$$\sqrt{12} \cdot \sqrt{3} = \sqrt{12 \cdot 3} = \sqrt{36} = \boxed{6}$$

$$\frac{\sqrt{500}}{\sqrt{5}} = \sqrt{\frac{500}{5}} = \sqrt{100} = \boxed{10}$$

$$\sqrt{5} \cdot \sqrt{3} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{5 \cdot 3} \cdot \sqrt{15} = \sqrt{15} \cdot \sqrt{15} = \boxed{15}$$

$$\frac{\sqrt{6} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3 \cdot 2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{3} \cdot \sqrt{2} \cdot \sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \sqrt{2} \cdot \sqrt{2} = \boxed{2}$$

$$\sqrt{150}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{50\cdot 3}\cdot\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{50}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{3}}{\sqrt{3}} = \sqrt{50}\cdot\sqrt{2} = \sqrt{100} = \boxed{10}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x^{13}}}{\sqrt[3]{x^{7}}} = \frac{x^{\frac{13}{3}}}{x^{\frac{7}{3}}} = x^{\frac{13}{3}-\frac{7}{3}} = x^{\frac{6}{3}} = \boxed{x^{3}}$$

$$\sqrt[3]{2x}\cdot\sqrt[3]{4x^{2}} = \sqrt[3]{2x\cdot 4x^{2}} = \sqrt[3]{8x^{3}} = \boxed{\sqrt[3]{8}\cdot\sqrt[3]{x^{3}} = 2x}$$

$$\frac{\sqrt[3]{27x}\cdot\sqrt[3]{x^{2}}\cdot\sqrt[3]{4x^{4}}}{\sqrt[3]{2x}} = \frac{\sqrt[3]{27x\cdot x^{2}\cdot 4x^{4}}}{\sqrt[3]{2x}} = \frac{\sqrt[3]{108x^{7}}}{\sqrt[3]{2x}} = \boxed{\frac{\sqrt[3]{54\cdot 2}\cdot\sqrt[3]{x^{7}}}{\sqrt[3]{2}\cdot\sqrt{x}}}$$

$$= \frac{\sqrt[3]{54}\cdot\cancel{\sqrt[3]{2}}\cdot\cancel{\sqrt[3]{x}}\cdot\sqrt[3]{x^{6}}}{\cancel{\sqrt[3]{2}}\cdot\cancel{\sqrt[3]{x}}} = \sqrt[3]{54}\cdot x^{\frac{6}{3}} = \boxed{\sqrt[3]{54}\cdot x^{2}}$$

$$\frac{\sqrt{8}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{20}} = \frac{\sqrt{2\cdot 4}\cdot\sqrt{2}\cdot\sqrt{5}}{\sqrt{5\cdot 4}} = \frac{\sqrt{2}\cdot\sqrt{2}\cdot\cancel{\sqrt{4}}\cdot\cancel{\sqrt{5}}}{\cancel{\sqrt{5}}\cdot\cancel{\sqrt{4}}} = \sqrt{2}\cdot\sqrt{2} = \boxed{2}$$

$$\frac{\sqrt[3]{x}\cdot\sqrt[3]{x^{16}}}{\sqrt[3]{x^{8}}} = \frac{x^{\frac{1}{3}}\cdot x^{\frac{16}{3}}}{x^{\frac{8}{3}}} = \frac{x^{\frac{17}{3}}}{x^{\frac{8}{3}}} = x^{\frac{17}{3}-\frac{8}{3}} = \boxed{x^{3}}$$

$$\sqrt{\sqrt{\sqrt{2}}} = \sqrt{\sqrt{2^{\frac{1}{2}}}} = \sqrt{2^{\frac{1}{4}}} = \boxed{2^{\frac{1}{8}}}$$

$$\sqrt{\sqrt{81}} = \sqrt{9} = \boxed{3}$$

$$\sqrt[4]{\sqrt{x}} = \sqrt[4]{x^{\frac{1}{2}}} = x^{\frac{1}{2\cdot 4}} = x^{\frac{1}{8}} = \boxed{\sqrt[8]{x}}$$

$$\sqrt[b]{\sqrt[a]{c}} = \sqrt[b]{c^{\frac{1}{a}}} = c^{\frac{1}{a\cdot b}} = \boxed{\sqrt[ab]{c}}$$

$$\sqrt[3]{\sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{27}}}} = \sqrt[3]{\sqrt[3]{x^{\frac{27}{3}}}} = \sqrt[3]{x^{\frac{9}{3}}} = x^{\frac{3}{3}} = x^{1} = \boxed{x}$$

$$\sqrt[6]{\sqrt[3]{a^{20}}} \cdot \sqrt[2]{\sqrt[9]{a^{16}}} = \sqrt[6\cdot 3]{a^{20}} \cdot \sqrt[2\cdot 9]{a^{16}} = \sqrt[18]{a^{20}} \cdot \sqrt[18]{a^{16}}$$

$$= a^{\frac{20}{18}} \cdot a^{\frac{16}{18}} = \boxed{a^{2}}$$

$$\sqrt[a]{\sqrt[b]{\sqrt[2a]{z}}} = \sqrt[a\cdot b\cdot 2a]{z} = \boxed{\sqrt[2a^{2}b]{z}}$$

$3x = 9$ $\quad X = \frac{9}{3} = 3$

$12x = 9$ $\quad X = \frac{9}{12} = \frac{3}{4}$

$\frac{1}{5}x = 3$ $\quad X = 3 \cdot 5 = 15$

$\frac{3}{4}x = -12$ $\quad 3X = -12 \cdot 4 \Rightarrow X = \frac{-12 \cdot 4}{3} = -16$

$5x = 9 - 2x$ $\quad 7X = 9 \Rightarrow X = \frac{9}{7}$

$2x - 12 = 3x - 25$ $\quad -X = -13 \mid \cdot -1 \quad = \quad X = 13$

$\frac{x-2}{7} = 0$ $\quad X - 2 = 0 \Rightarrow X = 2$

$10x - 7 = 5x + 14 - 2x$ $\quad 10X - 5X + 2X = 14 + 7 \Rightarrow 7X = 21 \quad X = 3$

$-7x + 2x + 13 = x - 17$ $\quad -7X + 2X - X = -17 - 13 \Rightarrow -6X = -30 \mid : -6 \Rightarrow X = 5$

$3x + 10 - 9x + 1 = 4x - 9$ $\quad 3X - 9X - 4X = -9 - 1 - 10 \Rightarrow -10X = -20 \mid : -10 \Rightarrow X = 2$

$3(x - 1) - 9x = 15$ $\quad 3X - 3 - 9X = 15 \Rightarrow -6X = 18 \mid : -6 \Rightarrow X = -3$

$3x - (x + 1) = 19$ $\quad 3X - X - 1 = 19 \Rightarrow 2X = 20 \mid : 2 \quad X = 10$

$2 - 3(2x - 4) = 8$ $\quad 2 - 6X + 12 = 8 \Rightarrow 6X = -6 \mid : 6 \Rightarrow X = -1$

$-4(x + 7) = 3x$ $\quad -4X - 28 = 3X \Rightarrow 7X = -28 \mid : 7 \Rightarrow X = -4$

$6\left(\frac{x-5}{6} + 3\right) = 29$ $\quad X - 5 + 18 = 29 \Rightarrow X = 16$

$$12\left(\frac{x}{2}-\frac{5}{6}\right)=14 = \frac{12x}{2} - \frac{5\cdot 12}{6} = 14$$

$$6x - 10 = 14 \Rightarrow 6x = 24 \Rightarrow x = 4$$

$$(x-1)(x+3) = x(x+5) \quad x^2+3x-x-3 = x^2+5x$$

$$2x - 5x = 3 \Rightarrow -3x = 3 \Rightarrow x = -1$$

$$(x-2)(x+3) = (x-4)(x+6) \quad x^2+3x-2x-6 = x^2+6x-4x-24$$

$$x-6 = 2x-24 \Rightarrow x = 18$$

$$(x+6)^2 = x(x+3) = x^2+12x+36 = x^2+3x$$

$$12x-3x = -36 \Rightarrow 9x = -36 \Rightarrow x = -4$$

$$\frac{x}{3}-\frac{3x}{4} = -x-7 \quad \frac{4x}{3\cdot 4} - \frac{3\cdot 3x}{3\cdot 4} + \frac{12x}{12} = -7$$

$$\frac{4x}{12} - \frac{9x}{12} + \frac{12x}{12} = -7$$

$$\frac{7x}{12} = -7 \Rightarrow x = -12$$

$$\frac{6x}{7}-\frac{3x+1}{2} = \frac{11}{14} = \frac{6x\cdot 2}{7\cdot 2} - \frac{7(3x+1)}{7\cdot 2} = \frac{11}{14}$$

$$\frac{12x}{14} - \frac{21x-7}{14} = \frac{11}{14} \quad \backslash \cdot 14$$

$$12x-21x-7 = 11 \Rightarrow -9x = 18 \Rightarrow x = -2$$

$4x - 16a = -2x + 2a$ $\quad 6x = 18a \;|:6 \implies \boxed{x = 3a}$

$6a + 5x = 7(x - 2a)$ $\quad 6a + 5x = 7x - 14a \implies 2x = 20a \;|:2 \implies \boxed{x = 10a}$

$8(2x - b) - 3(5x - 3b) = 7b - x + 8$

$16x - 8b - 15x + 9b = 7b - x + 8$

$2x = 6b + 8 \implies \boxed{x = 3b + 4}$

$\frac{x+2}{bx} = \frac{1}{b} + \frac{2}{b+x}, b \neq 1$ $\quad x + 2 = \frac{bx}{b} + \frac{2bx}{b+x}$

$(x+2)(b+x) = x(b+x) + 2bx$

$\cancel{bx} + \cancel{x^2} + 2b + 2x = \cancel{bx} + \cancel{x^2} + 2bx$

$2bx - 2x = 2b \implies x(2b-2) = 2b \implies x = \frac{2b}{2b-2} = \boxed{\frac{b}{b-1}}$

$\frac{4a + x}{a^2 - ax} = \frac{x}{4a - 4x}$ $\quad \frac{4a+x}{a(a-x)} = \frac{x}{4(a-x)} \;|\cdot(a-x)$

$\frac{4a+x}{a} = \frac{x}{4} \implies 16a + 4x = ax$

$4x - ax = -16a \implies x(4-a) = -16a$

$x = \frac{-16a}{(4-a)} = \boxed{\frac{16a}{a-4}}$

$bx + 16x = b$ $\quad x(b+16) = b \implies \boxed{x = \frac{b}{b+16}}$

$6x - 4a = 4ax + 2$ $\quad 6x - 4ax = 4a + 2$

$x(6 - 4a) = 4a + 2$

$x = \frac{4a+2}{6-4a} = \boxed{\frac{2a+1}{3-2a}}$

$8 + 12x = a(4 - 6x)$ $\quad 8 + 12x = 4a - 6ax$

$12x + 6ax = 4a - 8$

$x(12 + 6a) = 4a - 8 \Rightarrow \quad x = \frac{4a-8}{12+6a} = \frac{4(a-8)}{6(2+a)} = \boxed{\frac{2(a-8)}{3(2+a}}$

$-8a - 3(3x - 5a) = 4(a - 6x)$ $\quad -8a - 9x + 15a = 4a - 24x$

$24x + 9x = 4a - 15a + 8a$

$15x = -3a \quad \Rightarrow \quad x = \frac{-3a}{15} = \boxed{\frac{-a}{5}}$

$3x - 4b - 8 = 2b - 3x + 4$ $\quad 6x = 6b + 12 \quad | :6 \quad \Rightarrow \boxed{x = b + 2}$

$8b(x + 2) = 6bx - 10$ $\quad 8bx + 16b = 6bx - 10$

$2bx = -10 - 16b$

$x = \frac{-10-16b}{2b} = \frac{-5-8b}{b} = \boxed{\frac{-(8b+5)}{b}}$

$\frac{b}{4x^2 - a^2} = \frac{b}{2x - a} + \frac{2b}{2x + a}$ $\quad = \frac{b}{(2x+a)(2x-a)} = \frac{b}{2x-a} + \frac{2b}{2x+a} \quad | \cdot (2x+a)(2x-a)$

$b = b(2x+a) + 2b(2x-a) \quad | :b$

$1 = 2x + a + 4x - 2a \Rightarrow 6x = 1 + a \Rightarrow \boxed{x = \frac{1+a}{6}}$

$\frac{-2bx}{a^2 - b^2} = \frac{x}{a - b} + \frac{3a}{a + b}$ $\quad \frac{-2bx}{(a+b)(a-b)} = \frac{x}{a-b} + \frac{3a}{a+b} \quad | \cdot (a+b)(a-b)$

$-2bx = x(a+b) + 3a(a-b)$

$-2bx = ax + bx + 3a^2 - 3ab$

$ax + bx + 2bx = 3ab - 3a^2$

$x(a + 3b) = 3ab - 3a^2 \Rightarrow x = \dfrac{3ab - 3a^2}{a + 3b}$

4a (a + 2x) + 2(2a – x) = 5a

$4a^2 + 8ax + 4a - 2x = 5a$

$x(8a - 2) = 5a - 4a - 4a^2$

$x = \dfrac{a - 4a^2}{8a - 2} = \dfrac{a(1 - 4a)}{-2(1 - 4a)} = \boxed{\dfrac{-a}{2}}$

b (–2 – bx) = 6(bx + 2)

$bx \neq -2$

$-2b - b^2x = 6bx + 12$

$6bx + b^2x = -2b - 12$

$x(6b + b^2) = -2(b + 6) \Rightarrow x = \dfrac{-2(b+6)}{b(6+b)}$

עבור
$b \neq -6$

$\boxed{x = \dfrac{-2}{b}}$

$b\,(1 - bx) = x(b - 6) - 3$

$b \neq 2, -3$

$b - b^2x = bx - 6x - 3$

$6x - bx - b^2x = -3 - b$

$x(6 - b - b^2) = -3 - b \Rightarrow x = \dfrac{-(3+b)}{-(b^2 + b - 6)} = \dfrac{-(b+3)}{(b+3)(b-2)} = \boxed{\dfrac{-1}{b-2}}$

$$\begin{cases} y - x = 5 \\ y + x = 11 \end{cases}$$ $+$ $y - x + y + x = 11 + 5 \Rightarrow 2y = 16 \Rightarrow y = 8$

$8 - x = 5 \Rightarrow x = 3$ $\quad$ $\boxed{y = 8,\ x = 3}$

$$\begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ x - 5y = 0 \end{cases}$$ $|\cdot 3$ $\quad - \begin{cases} 3x + 2y = 17 \\ 3x - 15y = 0 \end{cases}$ $\quad 17y = 17 \Rightarrow y = 1$

$x - 5 \cdot (1) = 0 \Rightarrow x = 5$

$\boxed{x = 5 \quad y = 1}$

$$\begin{cases} 5x + 2y = 25 \\ 2x - y = 10 \end{cases}$$ $|\cdot 2$ $\quad + \begin{cases} 5x + 2y = 25 \\ 4x - 2y = 20 \end{cases} \Rightarrow 9x = 45 \Rightarrow x = 5$

$2 \cdot 5 - y = 10 \Rightarrow y = 0$

$\boxed{x = 5,\ y = 10}$

$$\begin{cases} 7x + y = 9 \\ 5x - y = 3 \end{cases}$$ $+ \Rightarrow 7x + 5x + y - y = 12 \Rightarrow 12x = 12$

$x = 1,$ $\quad 5 \cdot 1 - y = 3 \Rightarrow y = 2$

$\boxed{x = 1,\ y = 2}$

$$\begin{cases} 3x + 6y = 18 \\ 7x - 18y = 10 \end{cases}$$ $|\cdot 3$ $\quad + \begin{cases} 9x + 18y = 54 \\ 7x - 18y = 10 \end{cases} \Rightarrow 16x = 64 \Rightarrow x = 4$

$3 \cdot 4 + 6y = 18 \Rightarrow y = 1$

$\boxed{x = 4,\ y = 1}$

$$\begin{cases}-8x+3y=10 & |\cdot 2\\ 3x+2y=-10 & |\cdot 3\end{cases} \qquad -\begin{cases}-16x+6y=20\\ 9x+6y=-30\end{cases}$$

$$-25x=50 \Rightarrow x=-2$$

$$3\cdot(-2)+2y=-10 \Rightarrow y=-2$$

$$x=-2,\ y=-2$$

$$\begin{cases}3x-6y=9 & |\cdot 2\\ 8x+4y=24 & |\cdot 3\end{cases} \qquad +\begin{cases}6x-12y=18\\ 24x+12y=72\end{cases} \Rightarrow 30x=90 \Rightarrow x=3$$

$$3\cdot 3-6y=9 \Rightarrow y=0$$

$$x=3,\ y=0$$

$$\begin{cases}5x-2y=16 & |\cdot 5\\ -17x+10y=-40\end{cases} \qquad +\begin{cases}25x-10y=80\\ -17x+10y=-40\end{cases}$$

$$8x=40 \Rightarrow x=5$$

$$5\cdot 5-2y=16 \Rightarrow 2y=9 \qquad y=4.5$$

$$x=5,\ y=4.5$$

$$\begin{cases}2x+3y=y+4\\ -9x-12=6-3x\end{cases} = \begin{cases}2x+2y=4\\ -6x=18\end{cases} \Rightarrow x=-3$$

$$2\cdot(-3)+2y=4 \Rightarrow 2y=10$$

$$x=-3,\ y=5$$

$$\begin{cases} y + 3(x+4) = 3 \\ 4y + 6(x+4) = 12 \end{cases} = \begin{cases} y + 3x + 12 = 3 \\ 4y + 6x + 24 = 12 \end{cases} = \begin{cases} 2y + 6x = -18 \\ 4y + 6x = -12 \end{cases} \quad (-)$$

$$-2y = -6 \Rightarrow y = 3$$

$$2 \cdot 3 + 6x = -18 \Rightarrow x = -4$$

$$y = 3, \quad x = -4$$

$$\begin{cases} 3y + 4(x-5) = 25 \\ 8(y-1) + 4x = 52 \end{cases} = \begin{cases} 3y + 4x - 20 = 25 \\ 8y - 8 + 4x = 52 \end{cases} = \begin{cases} 3y + 4x = 45 \\ 8y + 4x = 60 \end{cases} \quad (-)$$

$$-5y = -15 \Rightarrow y = 3$$

$$3 \cdot 3 + 4x = 45 \Rightarrow 4x = 36 \Rightarrow x = 9$$

$$y = 3, \quad x = 9$$

$$\begin{cases} 3(x+y) = x - y + 6 \\ 5(2x+3y) = 4x - 3y \end{cases} = \begin{cases} 3x + 3y = x - y + 6 \\ 10x + 15y = 4x - 3y \end{cases} = \begin{cases} 2x + 4y = 6 \quad | \cdot 3 \\ 6x + 18y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 6x + 12y = 18 \\ 6x + 18y = 0 \end{cases} \quad (-) \Rightarrow -6y = 18 \Rightarrow y = -3$$

$$2x + 4 \cdot (-3) = 6 \Rightarrow x = 9$$

$$x = 9, \quad y = -3$$

$$\begin{cases} \frac{x}{2} + \frac{y}{5} = 2 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases} = \begin{cases} 5x + 2y = 20 \\ -3x + 2y = 4 \end{cases} \quad (-) \Rightarrow 8x = 16 \Rightarrow x = 2$$

$$-3 \cdot 2 + 2y = 4 \Rightarrow y = 5$$

$$x = 2, \quad y = 5$$

$$\begin{cases} \frac{3y}{5} + \frac{x}{3} = 4 \\ 3y - x = -4 \end{cases} = \begin{cases} 9y + 5x = 60 \\ 3y - x = -4 \quad / \cdot 5 \end{cases} = \begin{cases} 9y + 5x = 60 \\ 15y - 5x = -20 \end{cases} (+)$$

$24y = 40 \rightarrow y = \frac{5}{3}$

$3 \cdot (\frac{5}{3}) - x = -4 \rightarrow x = 9$

$y = \frac{5}{3}, \ x = 9$

$$\begin{cases} \frac{y}{6} + \frac{x}{3} = 2 \\ 5x - y = -19 \end{cases} = \begin{cases} y + 2x = 12 \\ 5x - y = -19 \end{cases} (+) \rightarrow 7x = -7$$

$x = -1$

$5 \cdot (-1) - y = -19 \rightarrow y = 14$

$x = -1, \ y = 14$

$$\begin{cases} \frac{x}{8} + \frac{y}{2} = 1 \\ \frac{2x}{3} - \frac{y}{6} = -\frac{1}{3} \end{cases} = \begin{cases} x + 4y = 8 \quad / \cdot 4 \\ 4x - y = -2 \end{cases} = \begin{cases} 4x + 16y = 32 \\ 4x - y = -2 \end{cases} (-)$$

$17y = 34 \rightarrow y = 2$

$\frac{x}{8} + \frac{2}{2} = 1 \rightarrow x = 0$

$y = 2, \ x = 0$

$$\begin{cases} 0.3x - 0.9y = 0 \\ 0.7x - 0.5y = -3.2 \end{cases} \rightarrow 0.3x = 0.9y \quad / : 0.3 \rightarrow x = 3y$$

נציב במשוואה השניה

$0.7 \cdot 3y - 0.5y = -3.2$

$1.6y = -3.2 \Rightarrow y = -2, \ x = 3 \cdot (-2) = -6$

$y = -2, \ x = -6$

$$\begin{cases} 0.35x - 0.6y = 0.1 \\ 0.2x - 0.15y = 0.25 \end{cases} \backslash \cdot 4 = \begin{cases} 0.35x - 0.6y = 0.1 \\ 0.8x - 0.6y = 1 \end{cases} (-)$$

$-0.45x = -0.9 \longrightarrow x = 2$

$0.35 \cdot 2 - 0.6y = 0.1$

$-0.6y = -0.6 \Rightarrow y = 1$

$x = 2, \; y = 1$

$$\begin{cases} 1.5x + 0.3y = -0.3 \\ 0.5x + 1.2y = 3.2 \end{cases} \backslash \cdot 3 = \begin{cases} 1.5x + 0.3y = -0.3 \\ 1.5x + 3.6y = 9.6 \end{cases} (-)$$

$-3.3y = -9.9 \longrightarrow y = 3$

$1.5x + 0.3 \cdot 3 = -0.3 \longrightarrow x = \frac{-4}{5}$

$y = 3 \quad x = \frac{-4}{5}$

$$\begin{cases} 9x - 3y = 18 - 3y \\ 30x + 4y = 6x - 4y \end{cases} = \begin{cases} 9x = 18 \\ 24x + 8y = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 2$$

$24 \cdot 2 = -8y$

$y = -6$

$x = 2, \; y = -6$

$x^2 + 7x + 10 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{-7 \pm \sqrt{(7)^2 - 4\cdot 10\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-7 \pm \sqrt{49-40}}{2}$$

$$\frac{-7 \pm 3}{2} \begin{array}{l} \nearrow -5 \\ \searrow -2 \end{array}$$

$X_1 = -2 \quad X_2 = -5$

$x^2 - 4x - 21 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot 1\cdot(-21)}}{2\cdot 1} = \frac{4 \pm \sqrt{100}}{2}$$

$$\frac{4 \pm 10}{2} \begin{array}{l} \nearrow 7 \\ \searrow -3 \end{array}$$

$X_1 = 7, \quad X_2 = -3$

$x^2 - 17x + 72 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4\cdot 72\cdot 1}}{2\cdot 1}$$

$$= \frac{17 \pm \sqrt{1}}{2} \begin{array}{l} \nearrow 9 \\ \searrow 8 \end{array}$$

$X_1 = 9, \quad X_2 = 8$

$x^2 + 8x + 12 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4\cdot 1\cdot 12}}{2\cdot 1} = \frac{-8 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow -6 \\ \searrow -2 \end{array}$$

$X_1 = -6, \quad X_2 = -2$

$2x^2 + 9x - 5 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{9^2 - 4\cdot(-5)\cdot 2}}{2\cdot 2} = \frac{-9 \pm 11}{4} \begin{array}{l} \nearrow -5 \\ \searrow \frac{1}{2} \end{array}$$

$X_1 = -5, \quad X_2 = \frac{1}{2}$

$2x^2 + 12x + 16 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{-12 \mp \sqrt{12^2 - 4\cdot 2\cdot 16}}{2\cdot 2} = \frac{-12 \pm 4}{4} \begin{array}{l} \nearrow -4 \\ \searrow -2 \end{array}$$

$X_1 = -4, \quad X_2 = -2$

$6x^2 - 14x - 12 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\cdot(-12)\cdot 6}}{2\cdot 6} = \frac{14 \pm 22}{12} \begin{array}{l} \nearrow 3 \\ \searrow -\frac{2}{3} \end{array}$$

$X_1 = 3, \quad X_2 = -\frac{2}{3}$

$8x^2 - 30x - 143 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{30 \pm \sqrt{(-30)^2 - 4 \cdot 8 \cdot (-143)}}{2 \cdot 8}$$

$$= \frac{30 \pm 74}{16} \begin{matrix} \nearrow \frac{13}{2} \\ \searrow -\frac{11}{4} \end{matrix}$$

$$\boxed{X_1 = \frac{13}{2} \quad , \quad X_2 = \frac{-11}{4}}$$

$12x^2 - 2x - 70 = 0$

$$\frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 12 \cdot (-70)}}{2 \cdot 12} = \frac{2 \pm 58}{24} \begin{matrix} \nearrow \frac{5}{2} \\ \searrow -\frac{7}{3} \end{matrix}$$

$$\boxed{X_1 = \frac{5}{2} \quad , \quad X_2 = \frac{-7}{3}}$$

$50x^2 - 55x - 63 = 0$

$$X_{1,2} = \frac{55 \pm \sqrt{(-55)^2 - 4(50)(-63)}}{50 \cdot 2} = \frac{55 \pm 125}{100} \begin{matrix} \nearrow \frac{9}{2} \\ \searrow -\frac{7}{10} \end{matrix}$$

$$\boxed{X_1 = \frac{9}{2} \quad , \quad X_2 = \frac{-7}{10}}$$

$$\begin{cases} y - x = 4 \\ 2xy = 10 \end{cases} \longrightarrow y = x + 4$$

$$2x(x+4) = 10$$

$$2x^2 + 8x - 10 = 0$$

$$X_{1,2} = \frac{-8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-10) \cdot 2}}{2 \cdot 2} = \frac{-8 \pm 12}{4} \begin{matrix} \nearrow 1 \\ \searrow -5 \end{matrix}$$

$$\boxed{\begin{matrix} X_1 = 1 & X_2 = -5 \\ y_1 = 1 + 4 = 5 & y_2 = -5 + 4 = -1 \end{matrix}}$$

$$\begin{cases} y = 2x^2 + 6x - 14 \\ y = -2x^2 + 10x - 6 \end{cases} \longrightarrow 2x^2 + 6x - 14 = -2x^2 + 10x - 6$$

$$4x^2 - 4x - 8 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4\cdot(-8)\cdot 4}}{2\cdot 4} = \frac{4 \pm 12}{8} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow -1 \end{array}$$

$x_1 = 2$ $\qquad\qquad$ $x_2 = -1$

$y_1 = 2\cdot 1 + 6\cdot 1 - 14 = -6$ $\qquad\qquad$ $y_2 = 2\cdot(-1) + 6\cdot(-1) - 14 = -18$

$$\begin{cases} 16x^2 - 2y^2 = 32 \\ y = 2 - 3x \end{cases} \qquad 16x^2 - 2(2-3x)^2 = 32$$

$$16x^2 - 2(4 - 12x + 9x^2) = 32$$

$$-2x^2 + 24x - 40 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-24 \pm \sqrt{(24)^2 - 4(-40)\cdot(-2)}}{2\cdot(-2)}$$

$$\frac{-24 \pm 16}{-4} \begin{array}{l} \nearrow 2 \\ \searrow 10 \end{array}$$

$x_1 = 2$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 10$

$y_1 = 2 - 3\cdot 2 = -4$ $\qquad\qquad$ $y_2 = 2 - 3\cdot 10 = -28$

$$\begin{cases} 4x^2 + 3xy - 5y^2 = 20 \\ x = 3 + y \end{cases} \qquad 4(3+y)^2 + 3y(3+y) - 5y^2 = 20$$

$$4(9 + 6y + y^2) + 9y + 3y^2 - 5y^2 = 20$$

$$2y^2 + 33y + 16 = 0 \qquad y_{1,2} = \frac{-33 \pm \sqrt{(33)^2 - 4(2)\cdot(16)}}{2\cdot 2}$$

$$= \frac{-33 \pm 31}{4} \begin{array}{l} \nearrow -\frac{1}{2} \\ \searrow -16 \end{array}$$

$y_1 = -\frac{1}{2}$ $\qquad\qquad$ $y_2 = -16$

$x_1 = 3 - \frac{1}{2} = 2.5$ $\qquad\qquad$ $x_2 = 3 - 16 = -13$

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 4 \\ y^2 - x = 8 \end{cases} \longrightarrow y^2 = 8 + x$$

$$x^2 + x + 8 = 4 \longrightarrow x^2 + x + 4 = 0$$

$$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{-1 \pm \sqrt{-15}}{2}$$

יצא לנו דיס קרימיננטה שלילית ולכן למערכת אין פתרון ממשי

$2x+5<6$ $\quad 2x<5-6 \longrightarrow \boxed{x<\frac{1}{2}}$

$2<\frac{x}{3}-1$ $\quad 2+1<\frac{x}{3} \longrightarrow 3\cdot 3<x \Rightarrow \boxed{x>9}$

$x<6x-15$ $\quad 15<6x-x \longrightarrow 15<5x \Rightarrow \boxed{3<x}$

$\frac{x+1}{2}-1>2$ $\quad /\cdot 2$

$x+1-2>4 \longrightarrow \boxed{x>5}$

מכנה משותף 12 /

$\frac{x}{3}-\frac{x}{4}\geq 5 \longrightarrow 4x-3x\geq 60 \Rightarrow \boxed{x\geq 60}$

מכנה משותף 10 /

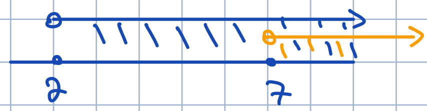
$\frac{x}{2}-9>-\frac{2x}{5} \longrightarrow 5x-90>-4x \longrightarrow 9x>90 \Rightarrow \boxed{x>10}$

$2x-a<1$ $\quad 2x<1+a \Rightarrow \boxed{x<\frac{1+a}{2}}$

$/\cdot 2$

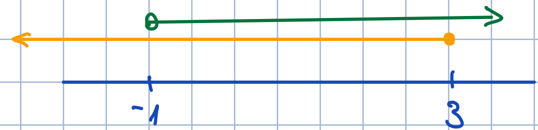
$\frac{3x+a}{2}\leq 1$ $\quad 3x+a\leq 2 \longrightarrow 3x\leq 2-a \Rightarrow \boxed{x\leq \frac{2-a}{3}}$

$x > 7$ או $x > 2$



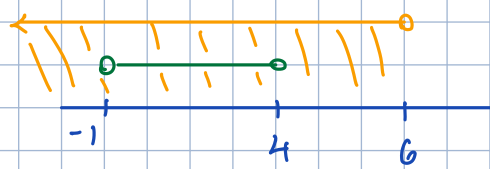
התחום $X>2$ מכיל את $X>7$ לכן נבחר $X>2$

$x > -1$ או $x \leq 3$



ניתן לראות כי התחום שבחרנו מכיל את כל המספרים לכן כל x

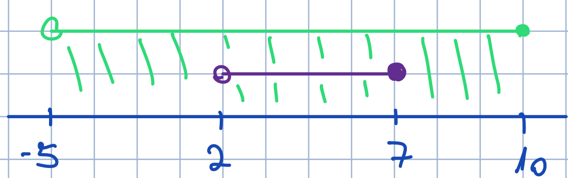
$-1 < x < 4$ או $3x - 18 < 0$



$3X < 18 \Rightarrow X < 6$

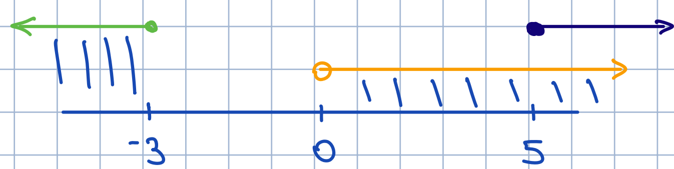
נבחר ב $X<6$

$2 < x \leq 7$ או $-5 < x \leq 10$



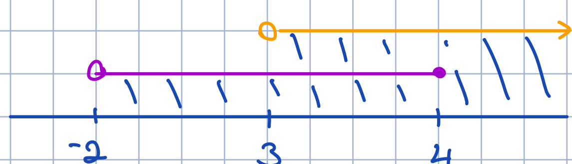
נבחר ב $-5 < X \leq 10$

$0 < x$ או $5 \leq x$ או $-3 \geq x$



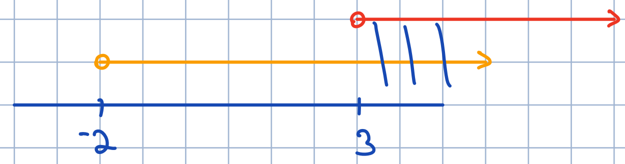
נבחר ב $X>0$ או $X\leq-3$

$3 < x$ או $-2 < x \leq 4$



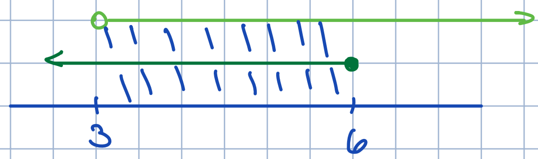
נבחר ב $X>-2$

$x > -2$ וגם $x > 3$



נבחר ב $\boxed{x>3}$

$x > 3$ וגם $x \le 6$



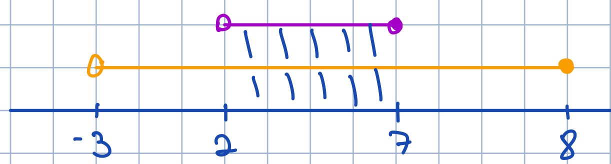
נבחר ב $\boxed{3<x\le 6}$

$x < 2$ וגם $4x - 16 < 0$

$4x < 16 \Rightarrow x < 4$

נבחר ב $\boxed{x<2}$

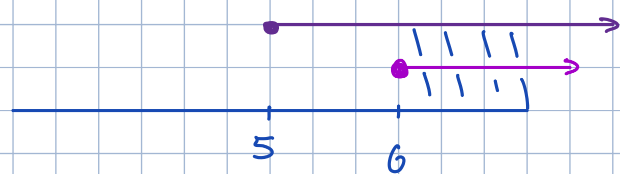
$2 < x \le 7$ וגם $-3 < x \le 8$



נבחר ב- $\boxed{2<x\le 7}$

$5 \le x$ וגם $4x + 1 \ge x + 19$

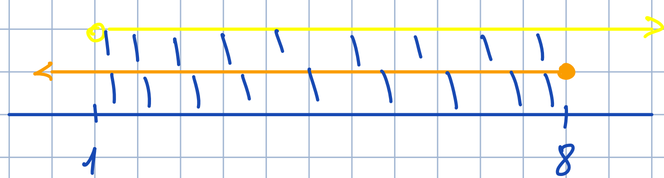
$3x \ge 18 \Rightarrow x \ge 6$



נבחר ב- $\boxed{x\ge 6}$

$x > 1$ וגם $4x - 1 \le x + 23$

$3x \le 24 \Rightarrow x \le 8$



נבחר ב- $\boxed{1<x\le 8}$

$27 < 2x - 7 < 45$

$27+7 < 2x-7+7 < 45+7$

$34 < 2x < 52 \Rightarrow$ $\boxed{17 < x < 26}$

$12 \le 4x + 8 < 24$

$12-8 \le 4x+8-8 < 24-8$

$4 \le 4x < 16 \Rightarrow$ $\boxed{1 \le x < 4}$

$3x - 4 < 5x + 6 < 7x - 8$

נפצל את אי השוויון למערכת וגם:

$3x-4 < 5x+6$ וגם $5x+6 < 7x-8$

$-10 < 2x$ $14 < 2x$

$-5 < x$ $7 < x$

לכן $\boxed{x > 7}$

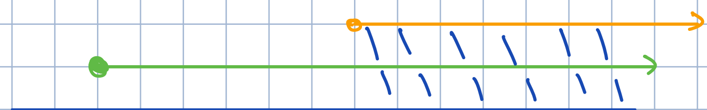
$3(x+1) + 7 < 2(2x+1) + 5 \le 4(8x+16) - 1$

נפרק את המערכת למערכת וגם

$3x+3+7 < 4x+2+5$ וגם $4x+2+5 \le 32x+64-1$

$3 < x$ $-56 \le 28x$

$-2 \le x$



לכן נבחר $\boxed{x > 3}$

$$2(4x+1)+8<7(2x-5)+9\le 11(x+8)+3$$

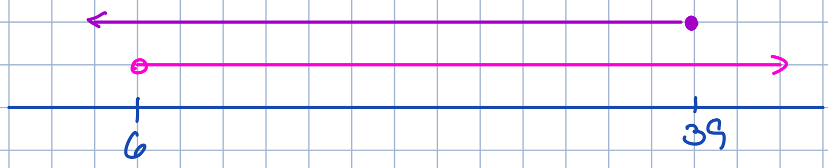
$8x+2+8<14x-35+9$ וגם $14x-35+9\le 11x+88+3$

$36<6x$

$3x\le 117$

$6<x$

$x\le 39$



לכן נבחר $6<x\le 39$

$$2(7x+14)\le 4(5x-11)<14(4x-1)$$

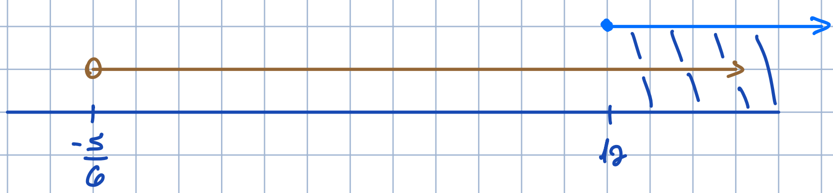
$14x+28\le 20x-44$ וגם $20x-44<56x-14$

$72\le 6x$

$-30<36x$

$12\le x$

$-\frac{5}{6}<x$



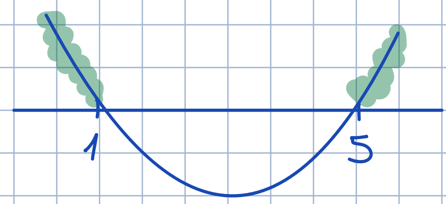
נבחר ב $x\ge 12$

$x^2 - 6x + 5 > 0$

נפתור את אי השוויון:

$$X_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4(5)\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{6 \pm 4}{2} \begin{cases} \nearrow 5 \\ \searrow 1 \end{cases}$$

נשרטט את הפתרונות



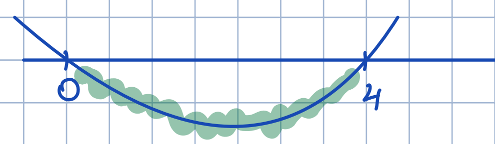
לכן נבחר ב $\boxed{X < 1 \quad \text{או} \quad X > 5}$

$2x^2 + 8x < 0$

$$2X(X+4) < 0$$

$X = 0$ $\quad$ $X = -4$

נשרטט את הפתרון:



לכן נבחר ב $0 < X < 4$

$4x^2 - 12x + 11 < 0$

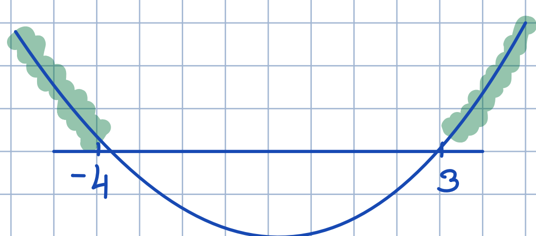
$$X_{1,2} = \frac{12 \pm \sqrt{(-12)^2 - 4(11)\cdot 4}}{4\cdot 2} = \frac{12 \pm \sqrt{-32}}{8}$$

הדיסקרימיננטה שלילית לכן $\boxed{\text{אין פתרון}}$

$x^2 + x - 12 > 0$

$$X_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1^2 - 4\cdot(-12)\cdot 1}}{2\cdot 1} = \frac{-1 \pm 7}{2} \begin{cases} \nearrow 3 \\ \searrow -4 \end{cases}$$

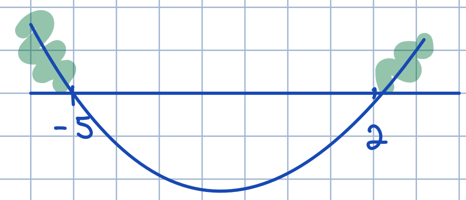
נשרטט את הפתרון



נבחר ב $\boxed{X < -4 \quad \text{או} \quad X > 3}$

$$2x^2+6x-20>0$$

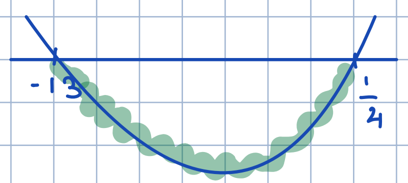
$$X_{1,2}=\frac{-6\pm\sqrt{6^2-4\cdot(-20)\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{-6\pm 14}{4}\begin{matrix}\nearrow 2\\ \searrow -5\end{matrix}$$



לכן נבחר ב $\boxed{X<-5 \text{ או } X>2}$

$$4x^2+51x-13<0$$

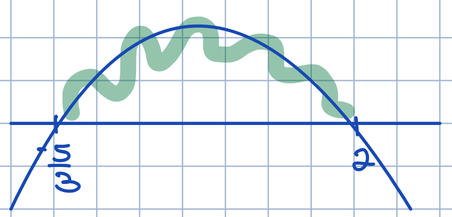
$$X_{1,2}=\frac{-51\pm\sqrt{51^2-4\cdot 4\cdot(-13)}}{2\cdot 4}=\frac{-51\pm 53}{8}=\begin{matrix}\nearrow \frac{1}{4}\\ \searrow -13\end{matrix}$$



לכן נבחר ב $\boxed{-13<X<\frac{1}{4}}$

$$-6x^2+2x+20>0$$

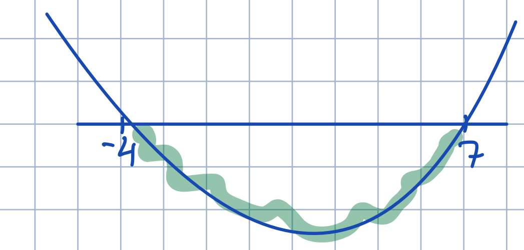
$$X_{1,2}=\frac{-2\pm\sqrt{2^2-4\cdot 20\cdot(-6)}}{2\cdot(-6)}=\frac{-2\pm 22}{-12}\begin{matrix}\nearrow 2\\ \searrow -\frac{5}{3}\end{matrix}$$



לכן הפתרון הנו $\boxed{-\frac{5}{3}<X<2}$

$13x^2 - 39x - 364 < 0$

$$X_{1,2} = \frac{39 \pm \sqrt{(-39)^2 - 4 \cdot 13 \cdot (-364)}}{2 \cdot 13} = \frac{39 \pm 143}{26} \begin{array}{l} \nearrow 7 \\ \searrow -4 \end{array}$$

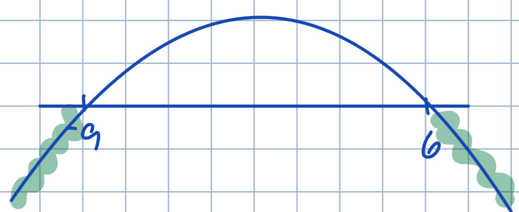


$\boxed{-4 < X < 7}$

נבחר בפתרון

$-2x^2 - 6x + 108 < 0$

$$X_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{(-6)^2 - 4 \cdot (-2) \cdot 108}}{2 \cdot (-2)} = \frac{6 \pm 30}{-4} \begin{array}{l} \nearrow -9 \\ \searrow 6 \end{array}$$



$X < 9$ או $X > 6$

$x^2-2x<0$ **וגם** $x^2-5x+4<0$

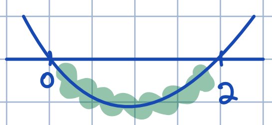
נפתור את שני האי שוויונים ונשרטט

על מערכת צירים :

$x^2-2x<0$

$x(x-2)<0$

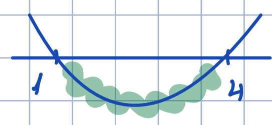
$x=0$ $\quad$ $x=2$



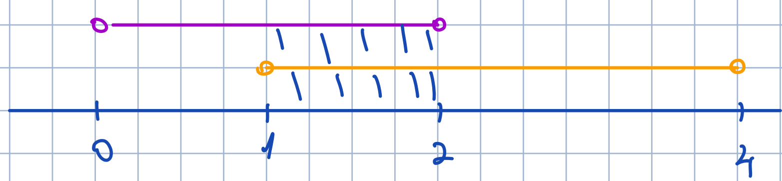
$0<x<2$

$x^2-5x+4<0$

$x_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}$ $\nearrow 4$ $\searrow 1$



$1<x<4$



הפתרון הוא $\boxed{1<x<2}$

$x^2-8x+16\le0$ **וגם** $x^2-9x+18<0$

$x^2-8x+16\le0$

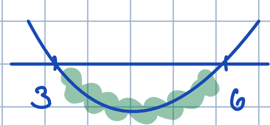
$x_{1,2}=\frac{8\pm0}{2}=4$

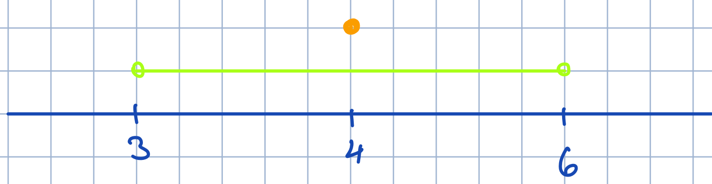
רק עבור $x=4$

הביטוי קטן/שווה 0

$x^2-9x+18<0$

$x_{1,2}=\frac{9\pm3}{2}$ $\nearrow 6$ $\searrow 3$





הפתרון היחיד של מערכת וגם $\boxed{x=4}$

$x^2 - 4x + 4 > 0$ וגם $x^2 - 2x + 1 \le 0$

$x^2 - 2x + 1 \le 0$

$$x_{1,2} = \frac{2 \pm 0}{2} = 1$$

רק עבור $x=1$ הביטוי
קטן \ שווה ל-0

$x^2 - 4x + 4 > 0$

$$x_{1,2} = \frac{4 \pm 0}{2} = 2$$

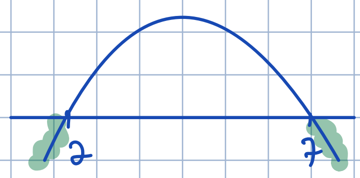
עבור כל $x \neq 2$ הביטוי גדול מ-0

לכן התשובה $\boxed{x=1}$

$-x^2+9x-14<0$ וגם $x^2-2x-3<0$

$-x^2+9x-14<0$

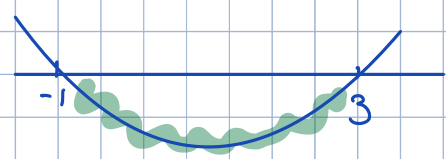
$x_{1,2}=\dfrac{-9\pm5}{-2}$ ↗ 7 ↘ 2

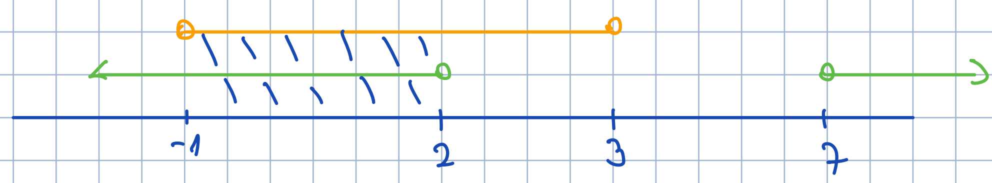


$x<2$ או $x>7$

$x^2-2x-3<0$

$x_{1,2}=\dfrac{2\pm4}{2}$ ↗ 3 ↘ -1



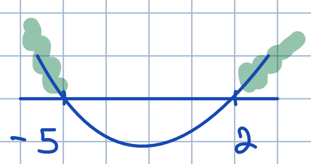


$\boxed{-1<x<2}$

$x^2+3x-10>0$ או $-4x^2+49x-12>0$

$x^2+3x-10>0$

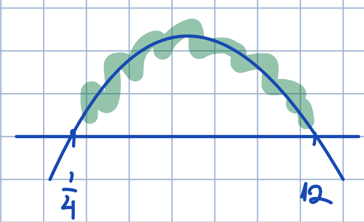
$x_{1,2}=\dfrac{-3\pm7}{2}$ ↗ -5 ↘ 2



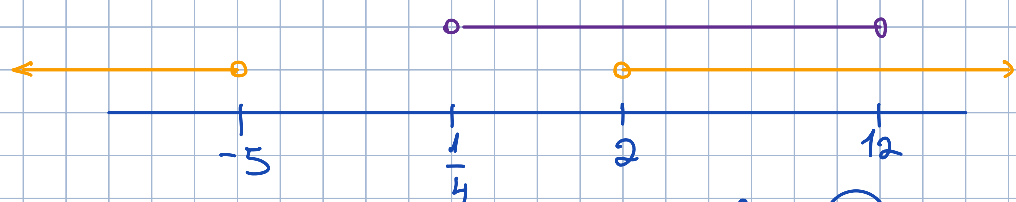
$x<-5$ או $x>2$

$-4x^2+49x-12>0$

$x_{1,2}=\dfrac{-49\pm47}{-8}$ ↗ 12 ↘ $\frac{1}{4}$



$\frac{1}{4}<x<12$



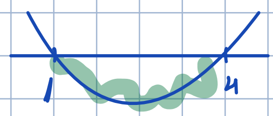
המערכת הנ"ל מורכבת או ולכן

$\boxed{x<-5 \text{ או } \frac{1}{4}<x<12}$

$x^2 - 5x + 4 < 0$ וגם $2x^2 - 11x + 15 < 0$

$x^2 - 5x + 4 < 0$

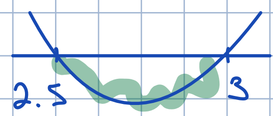
$x_{1,2} = \frac{5 \pm 3}{2}$ → 4, 1



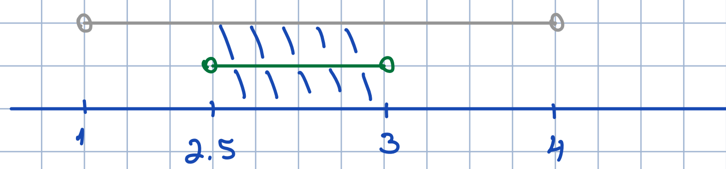
$1 < x < 4$

$2x^2 - 11x + 15 < 0$

$x_{1,2} = \frac{11 \pm 1}{4}$ → 3, 2.5



$2.5 < x < 3$



$\boxed{2.5 < x < 3}$

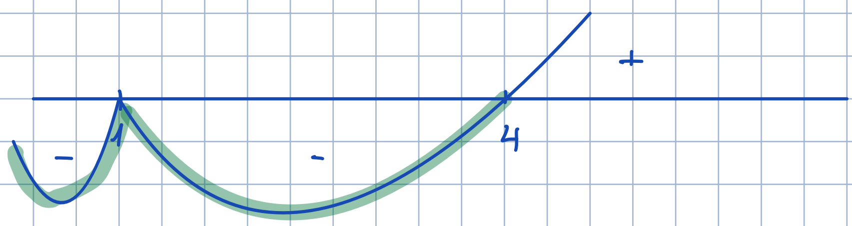
$$\frac{x^2-5x+4}{x-1}<0$$

המכנה מתאפס עבור $X=1$

המונה מתאפס עבור :

$$X_{1,2}=\frac{5\pm3}{2}\begin{matrix}\nearrow 4\\ \searrow 1\end{matrix}$$

נשרטט על ציר המספרים :



על התחום $1<X<4$ ו $X<1$ הביטוי קטן מ-0

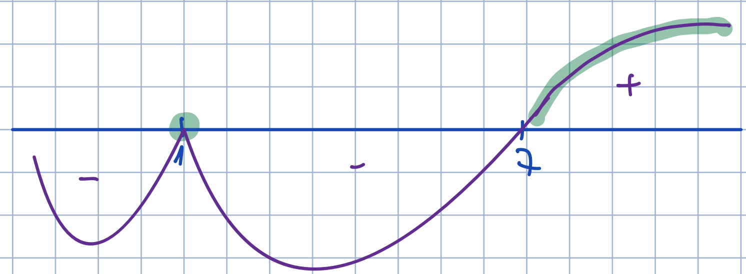
$$\frac{x^2-2x+1}{x-7}\geq 0$$

המכנה מתאפס עבור $X=7$

המונה מתאפס עבור :

$$X_{1,2}=\frac{2\pm0}{2}=1$$

נשרטט על ציר המספרים :



עבור $X=1$ ו- $X>7$ הביטוי גדול \ שווה ל-0

$$\frac{x^2-9x+18}{x^2-x-6}\leq 0$$

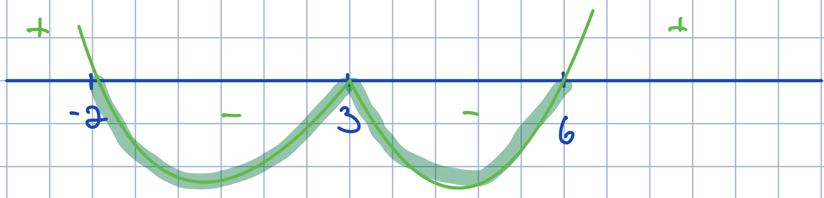
המונה מתאפס עבור:

$$X_{1,2}=\frac{9\pm3}{2}\begin{matrix}\nearrow 3\\ \searrow 6\end{matrix}$$

המכנה מתאפס עבור:

$$X_{1,2}=\frac{1\pm5}{2}\begin{matrix}\nearrow 3\\ \searrow -2\end{matrix}$$

נשרטט את ציר המספרים:



הביטוי קטן\שווה ל-0 עבור $3 < x \le 6$ או $-2 < x < 3$

(נשים לב ש הנק' 3 מאפסת את המכנה ולכן לא מוגדר עבורה)

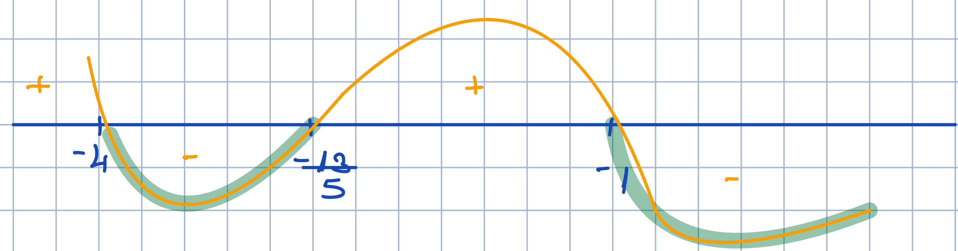
$$\frac{x^2-9}{x^2+5x+4} \le 1 \qquad \frac{x^2-9}{x^2+5x+4} - 1 \le 0$$

$$\frac{x^2-9-(x^2+5x+4)}{x^2+5x+4} \le 0 \qquad \frac{-5x-13}{x^2+5x+4} \le 0$$

המונה מתאפס עבור: $-5x-13=0 \Rightarrow x=\frac{-13}{5}$

המכנה מתאפס עבור: $x_{1,2}=\frac{-5\pm 3}{2}$ ↗ -4 ↘ -1

נשרטט את התחום:



לכן עבור $x>-1$ או $\boxed{-4 < x \le \frac{-13}{5}}$ הביטוי קטן\שווה ל-0

$$\frac{x}{x+5}+\frac{5}{x^2+5x}>\frac{1}{x}$$

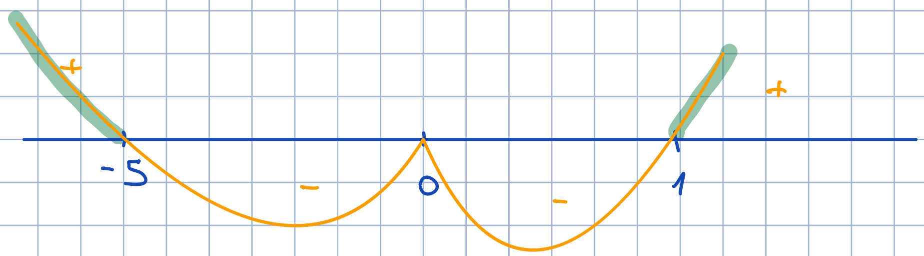
$$\frac{X}{X+5}+\frac{5}{X(X+5)}-\frac{1}{X}>0$$

מכנה משותף

$$\frac{X^2+5-(X+5)}{X(X+5)}=\frac{X^2-X}{X(X+5)}=\frac{X(X-1)}{X(X+5)}>0$$

המונה מתאפס עבור $X=0,1$

המכנה מתאפס עבור $X=0,-5$



לכן עבור $\boxed{X>1 \text{ או } X<-5}$ הביטוי גדול מ-0

$$\frac{2}{9}<\frac{2x^2+6x+20}{x^2-9}\leq\frac{2}{5}$$

ניתן להבחין כי המכנה חיובי תמיד עבור כל ערך של x והמכנה מתאפס עבור $X=\pm3$ וקטן מ-0 עבור $-3<X<3$, נשים לב שגם עבור כל ערך של $X>3$ או $X<-3$ הביטוי לא נמצא בין $\frac{2}{9}$ ל $\frac{2}{5}$ ועבור כל ערך X הנמצא בין $-3<X<3$ נקבל ביטוי שלילי לכן:

אין פתרון ממשי לאי השוויון

$$\frac{x^2-6x+16}{3x^2+2x-1}<0$$

המונה מתאפס עבור: אף ערך של x

המכנה מתאפס עבור:

$$X_{1,2}=\frac{-2\pm4}{2\cdot3}\to\frac{1}{3},\ -1$$

לכן הביטוי קטן מ-0

עבור $\boxed{-1<X<\frac{1}{3}}$

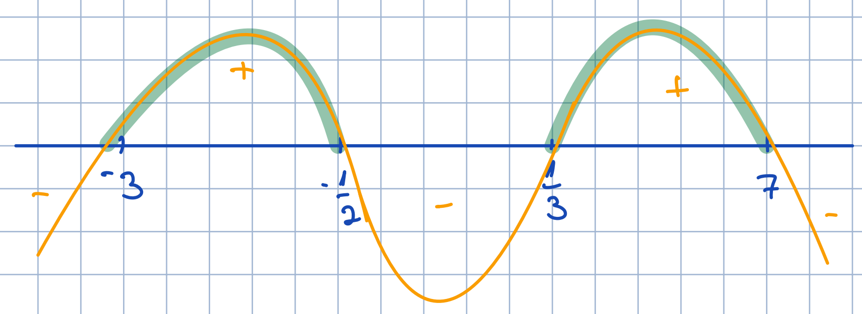
$$\frac{6x^2+x-1}{-x^2+4x+21} > 0$$

המונה מתאפס עבור:

$$X_{1,2} = \frac{-1 \pm 5}{12} \begin{cases} -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{3} \end{cases}$$

המכנה מתאפס עבור:

$$X_{1,2} = \frac{-4 \pm 10}{-2} \begin{cases} 7 \\ -3 \end{cases}$$



לכן עבור $\boxed{-3 < X < -\frac{1}{2} \quad \text{או} \quad \frac{1}{3} < X < 7}$ הביטוי גדול מ-0

$$\frac{-x^2+4x+21}{3x^2+12x} \leq 0$$

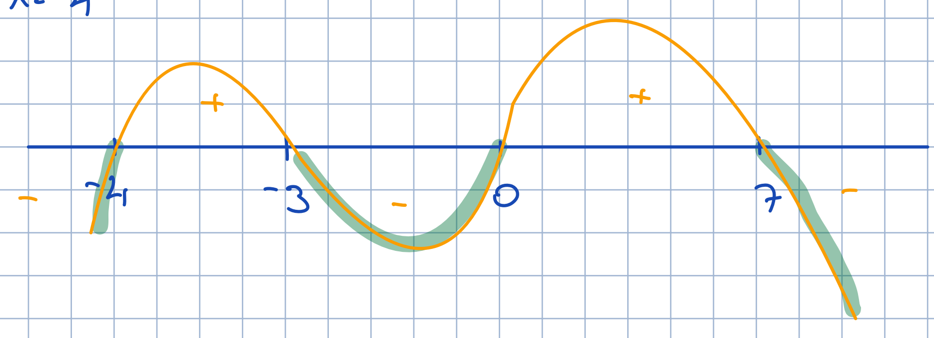
המונה מתאפס עבור:

$$X_{1,2} = \frac{-4 \pm 10}{-2} \begin{cases} 7 \\ -3 \end{cases}$$

המכנה מתאפס עבור:

$3X(X+4)$

$X=0 \qquad X=-4$



לכן עבור $\boxed{X < -4 \ , \ -3 \leq X < 0 \ , \ X \geq 7}$ הביטוי קטן/שווה 0

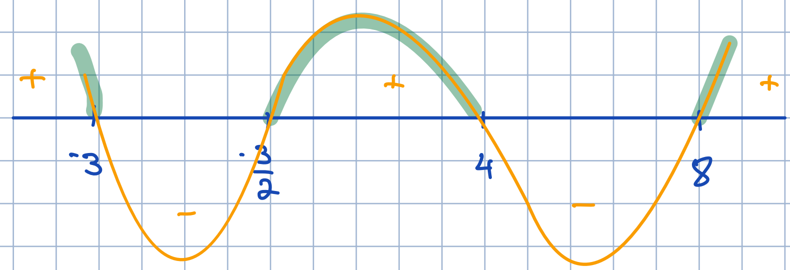
$$\frac{2x^2+9x+9}{x^2-12x+32} \ge 0$$

המונה מתאפס עבור:

$$X_{1,2} = \frac{-9 \pm 3}{4} \begin{array}{l} \nearrow -3 \\ \searrow -\frac{3}{2} \end{array}$$

המכנה מתאפס עבור

$$X_{1,2} = \frac{12 \pm 4}{2} \begin{array}{l} \nearrow 4 \\ \searrow 8 \end{array}$$



עבור $x \le 3$, $-\frac{3}{2} \le x < 4$, $x > 8$ הביטוי גדול/שווה -0

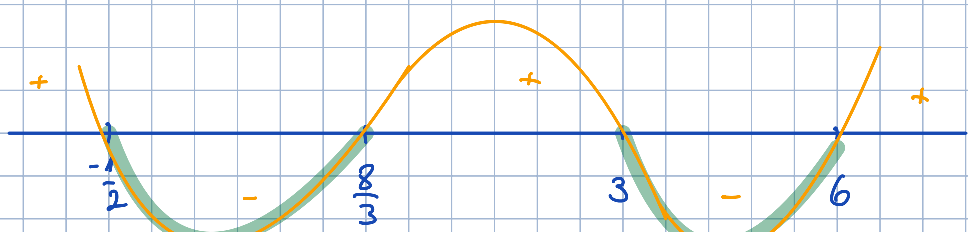
$$\frac{-6x^2+13x+8}{-x^2+9x-18} \le 0$$

המונה מתאפס עבור:

$$X_{1,2} = \frac{-13 \pm 19}{-12} \begin{array}{l} \nearrow \frac{8}{3} \\ \searrow -\frac{1}{2} \end{array}$$

המכנה מתאפס עבור:

$$X_{1,2} = \frac{-9 \pm 3}{-2} \begin{array}{l} \nearrow 6 \\ \searrow 3 \end{array}$$



עבור $3 < x < 6$, $-\frac{1}{2} \le x \le \frac{8}{3}$ הביטוי קטן/שווה -0

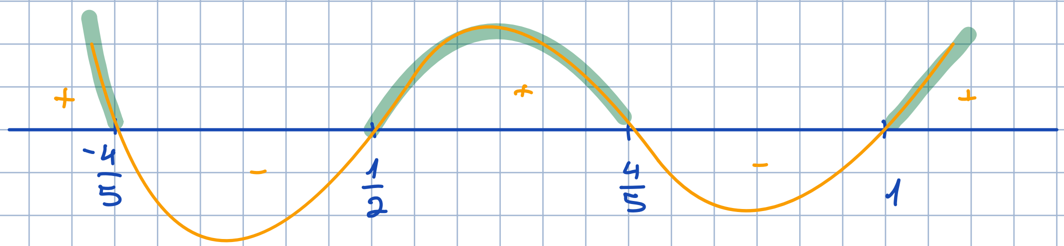
$$\frac{5x^2-x-4}{10x^2-13x+4} > 0$$

המונה מתאפס עבור:

$$X_{1,2} = \frac{1 \pm 9}{10} \rightarrow 1, \quad -\frac{8}{10} = -\frac{4}{5}$$

המכנה מתאפס עבור:

$$X_{1,2} = \frac{13 \pm 3}{20} \rightarrow \frac{4}{5}, \quad \frac{1}{2}$$



עבור $X>1$, $\frac{1}{2} < X < \frac{4}{5}$, $X < -\frac{4}{5}$ הביטוי גדול מ-0

$x^2 - mx + 36 = 0$

$\Delta = \sqrt{(-m)^2 - 4\cdot1\cdot36}$ $\qquad m^2 - 144 > 0$

לכן לביטוי שורשים ממשיים עבור $m>12$ או $m<-12$

$x^2 - mx - 12m = 0$

$\Delta = \sqrt{(-m)^2 - 4\cdot1\cdot(-12m)}$ $\qquad m^2 + 48m > 0$ $\qquad m(m+48) > 0$

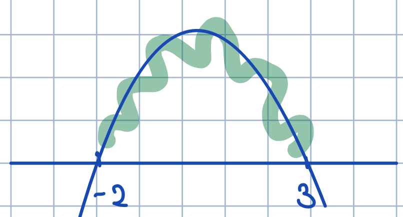
לכן $0<m<48$

$mx^2 - 2\sqrt{6}x + (m-1) = 0$

$\Delta = \sqrt{(-2\sqrt{6})^2 - 4\cdot m\cdot(m-1)}$ $\qquad 24 - 4m^2 + 4m > 0$

$-4m^2 + 4m + 24 > 0$

$m_{1,2} = \dfrac{-4 \pm 20}{-8}$ $\nearrow 3$, $\searrow -2$



על מנת שהדסקרמיננטה תהיה גדולה מ-0 $-2<m<3$

$x^2 - 4mx + 3m^2$

$\Delta = \sqrt{(-4m)^2 - 4\cdot 3m^2}$ $\qquad 16m - 12m > 0$

לכן עבור $m \neq 0$ נקבל שני פתרונות למשוואה

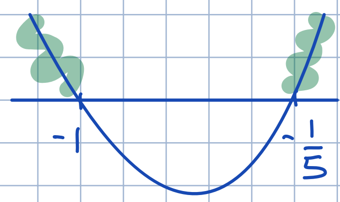
$$mx^2 + x(m-1) - (m+2) = 0$$

$$\Delta = \sqrt{(m-1)^2 - 4m\cdot(-m-2)}$$

$$m^2 - 2m + 1 + 4m^2 + 8m > 0$$

$$5m^2 + 6m + 1 > 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-6 \pm 4}{10} \quad \nearrow -1 \quad \searrow -\frac{1}{5}$$



לכן עבור $m > -\frac{1}{5}$ או $m < -1$ יש 2 פתרונות ממשיים

$$x^2 - mx + 24m = 0$$

בשביל פתרון ממשי אחד נדרוש ש $\Delta = 0$

$$\Delta = \sqrt{(-m)^2 - 4\cdot 24m}$$

$$m^2 - 96m = 0 \qquad m(m-96) = 0$$

$$m = 0 \qquad m = 96$$

לכן עבור $m = 96$, $m = 0$ יש פתרון ממשי אחד

$$-mx^2 - 2x + (m+1) = 0$$

$$\Delta = \sqrt{(-2)^2 - 4(-m)\cdot(m+1)} = 0$$

$$4 + 4m(m+1) = 0 \Rightarrow 4m^2 + 4m + 4 = 0$$

$$m_{1,2} = \frac{-4 \pm \sqrt{4^2 - 4\cdot 4\cdot 4}}{8} = \frac{-4 \pm \sqrt{-48}}{8}$$

קיבלנו ביטוי שלילי מתחת לשורש ולכן אין לבעיה פתרון ממשי

$(m-1)x^2 - 2\sqrt{35}x + (m+1) = 0$

$$\Delta = \sqrt{(-2\sqrt{35})^2 - 4(m-1)(m+1)} = 0$$

$$140 - 4m^2 + 4 = 0$$

$$4m^2 - 144 = 0 \quad 1:4 \quad \Rightarrow \quad m^2 - 36 = 0$$

$$m^2 = 36 \quad \Rightarrow \quad m = \pm 6$$

לכן עבור $m=\pm6$ לביטוי יש פתרון אחד?

$(m-1)^2x^2 + (m-1)x + 1$

בשביל שלא יהיו פתרונות למשוואה על ה-Δ להיות קטנה מ-0

$$\Delta = \sqrt{(m-1)^2 - 4\cdot(m-1)^2\cdot 1} = \sqrt{-3(m-1)^2}$$

$$-3(m-1)^2 < 0$$

מכיוון שהביטוי $(m-1)^2$ חיובי לכל $m\neq1$ הביטוי $-3(m-1)^2$ שלילי לכל

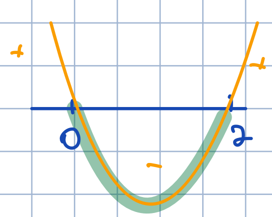
$m\neq1$ ולכן עבור כל $m\neq1$ אין פתרון למערכת

$x^2 - 2m^2x + 8m$

$$\Delta = \sqrt{(-2m^2)^2 - 4\cdot 8m} \qquad 4m^4 - 32m < 0$$

$$4m(m^3-8) < 0$$

$m=0 \qquad m=2$



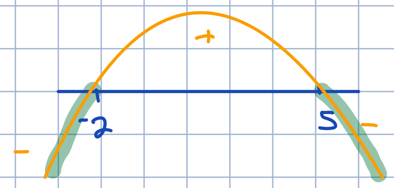
לכן עבור $0<m<2$ אין פתרון למשוואה.

$(m-4)x^2 + \sqrt{24}x + (m+1)$

$\Delta = \sqrt{(\sqrt{24})^2 - 4(m-4)(m+1)} = \sqrt{24 - 4m^2 + 12m + 16}$

$-4m^2 + 12m + 40 < 0$

$m_{1,2} = \frac{-12 \pm 28}{-8}$ → 5, -2



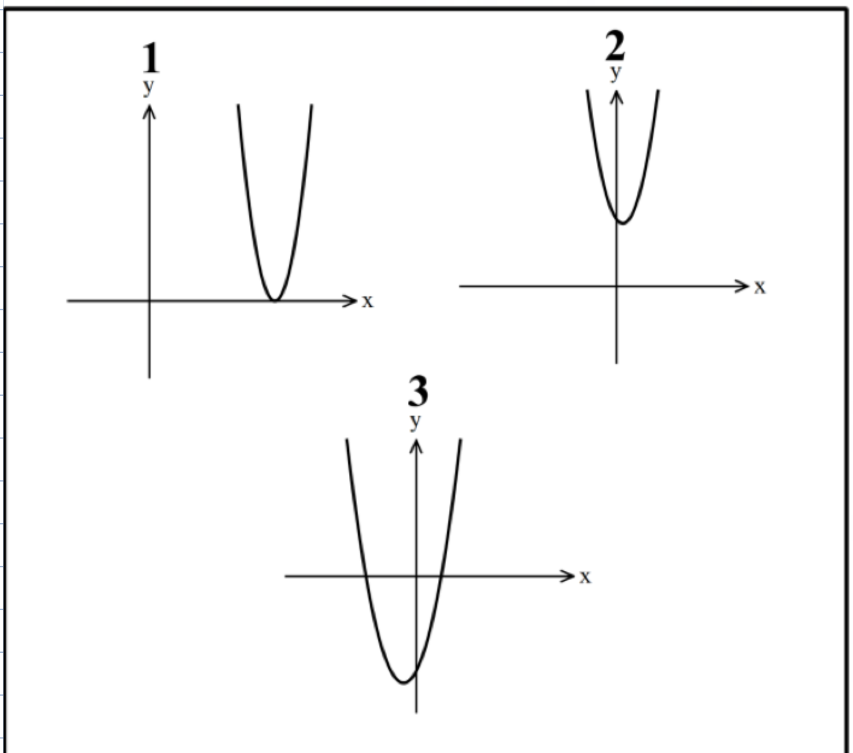
לכן עבור $x<-2$ או $x>5$ למשוואה אין פתרונות

נתונה הפונקציה הבאה : $f(x) = x^2 - mx + 4m$. לפנייך שלושה ערכים אפשריים לפרמטר m. מבלי לחקור את הפונקציה קבע איזו סקיצה מתאים לכל אחד מן הערכים :

א. $m = -2$

ב. $m = 16$

ג. $m = 2$



בכדי לקבוע איזה גרף מתאים לאיזו פונ' מספיק לבדוק כמה פתרונות יש פונקציה, אלו הן בעצם החיתוך עם ציר x

עבור $m=-2$

x^2+2x-8

$\Delta = \sqrt{4-4\cdot(-8)} > 0 \Rightarrow$ 2 פתרונות ולכן גרף 3

עבור $m=16$

$x^2-16x+64$

$\Delta = \sqrt{256-256} = 0 \Rightarrow$ פתרון אחד ולכן גרף 1

עבור $m=2$

x^2-2x+8

$\Delta = \sqrt{(-2)^2-4\cdot 8} < 0$ אין פתרון ולכן גרף 2.

$x^2-4x+m>0$

על מנת שהפרבולה לא תחתוך את ציר -x

נדרוש שלא יהיו נק' בהן היא מתאפסת

כלומר $\Delta<0$, לכן

$\Delta=\sqrt{(-4)^2-4m}<0$

$\Rightarrow \boxed{m>4}$

$x^2-8mx+6m^2>0$

$\Delta=\sqrt{(-8m)^2-4(6m^2)}<0 \Rightarrow 64m^2-24m^2<0$

$40m^2<0$

הביטוי גדול מ-0 עבור כל ערך של m

לכן **אין m שמקיים זאת**

$-x^2+4x-m^2-7<0$

$\Delta=\sqrt{(4)^2-4(-1)\cdot(-m^2-7)}<0 \Rightarrow 16-4m^2-28<0$

$-4m^2-12<0$

הביטוי קטן מ-0 לכל m לכן **יש פתרון לכל m**

$(m-2)x^2+4x+m+1>0$

$m>2$

$m>2$ לכן הפרבולה מחייכת, נדרוש

שלא יהיה חיתוך עם ציר x כלומר $\Delta<0$

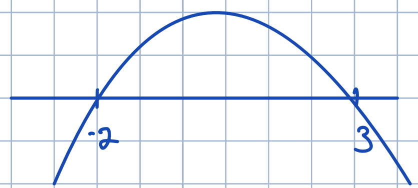
$\Delta = \sqrt{4^2-4(m+1)\cdot(m-2)} < 0$

$16-4(m^2-m-2)<0$

$16-4m^2+4m+8<0$

$-m^2+m+6<0$

$m_{1,2}=\frac{-1\pm5}{-2}$ → 3, -2



מכיוון ש $m>2$ נבחר ב $\boxed{m>3}$

$x^4 - 26x^2 + 25 = 0$

נציב $x^2 = t$

$t^2 - 26t + 25 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{26 \pm \sqrt{(-26)^2 - 4 \cdot 25}}{2} = \frac{26 \pm 24}{2} \begin{matrix} \nearrow 25 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

מקרה ראשון:

$x^2 = 25$ $\quad x_1 = 5 \quad x_2 = -5$

מקרה שני

$x^2 = 1$ $\quad x_3 = 1 \quad x_4 = -1$

$x^4 - 4x^2 - 5 = 0$

נציב $x^2 = t$

$t^2 - 4t - 5 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{4 \pm \sqrt{(-4)^2 - 4 \cdot (-5)}}{2} = \frac{4 \pm 6}{2} \begin{matrix} \nearrow 5 \\ \searrow -1 \end{matrix}$$

נפסל - x^2 אי שלילי

$x^2 = 5$ $\quad x = \pm\sqrt{5}$

$x^4 - 25x^2 + 144 = 0$

נציב $x^2 = t$

$t^2 - 25t + 144 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{25 \pm \sqrt{(-25)^2 - 4(144)}}{2} = \frac{25 \pm 7}{2} \begin{matrix} \nearrow 16 \\ \searrow 9 \end{matrix}$$

מקרה ראשון:

$x^2 = 16$ $\quad x_1 = 4 \quad x_2 = -4$

מקרה שני:

$x^2 = 9$ $\quad x_3 = 3 \quad x_4 = -3$

$x^6 - 9x^3 + 8 = 0$

נציב $x^3 = t$

$t^2 - 9t + 8 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{9 \pm 7}{2} \begin{matrix} \nearrow 8 \\ \searrow 1 \end{matrix}$$

מקרה ראשון

$x^3 = 8$ $\quad x = 2$

מקרה שני

$x^3 = 1$ $\quad x = 1$

$x^4 - 16x^2 + 64 = 0$

נציב $x^2 = t$

$t^2 - 16t + 64 = 0$

$t_{1,2} = \frac{16 \pm 0}{2} = 8$

$x^2 = 8$

$\boxed{x = \pm 2\sqrt{2}}$

$x^8 - 257x^4 + 256 = 0$

נציב $x^4 = t$

$t^2 - 257t + 256 = 0$

$t_{1,2} = \frac{257 \pm 255}{2}$ ↗ 256 ↘ 1

מקרה ראשון:

$x^4 = 256$

$\boxed{x = \pm 4}$

מקרה שני:

$x^4 = 1$

$\boxed{x = \pm 1}$

$9x^4 - 19x^2 + 2 = 0$

נציב $x^2 = t$

$9t^2 - 19t + 2 = 0$

$t_{1,2} = \frac{19 \pm 17}{18}$ ↗ 2 ↘ $\frac{1}{9}$

מקרה ראשון:

$x^2 = 2$

$\boxed{x = \pm \sqrt{2}}$

מקרה שני:

$x^2 = \frac{1}{9}$

$\boxed{x = \pm \frac{1}{3}}$

$x^6 - 24x^3 - 81 = 0$

נציב $x^3 = t$

$t^2 - 24t - 81 = 0$

$t_{1,2} = \frac{24 \pm 30}{2}$ $\nearrow 27$, $\searrow -3$

מקרה ראשון :

$x^3 = 27$ $\quad x = 3$

מקרה שני :

$x^3 = -3$ $\quad x = -\sqrt[3]{3}$

$x^{10} - 242x^5 - 243 = 0$

נציב $x^5 = t$

$t^2 - 242t - 243 = 0$

$t_{1,2} = \frac{242 \pm 244}{2}$ $\nearrow 243$, $\searrow -1$

מקרה ראשון :

$x^5 = 243$ $\quad x = 3$

מקרה שני :

$x^5 = -1$ $\quad x = -1$

$\sqrt{4x+8}=12$ $\qquad (\sqrt{4x+8})^2 = 12^2$

$4x+8=144 \implies \boxed{x=34}$

$-9+\sqrt{3x+9}=0$ $\qquad (\sqrt{3x+9})^2 = 9^2$

$3x+9=81 \implies \boxed{x=24}$

$\sqrt{12x^2-4x+24}=6x-4$ $\quad \backslash(\,)^2 \qquad 12x^2-4x+24=(6x-4)^2$

$12x^2-4x+24 = 36x^2-48x+16$

$24x^2-44x-8=0$

$$x_{1,2} = \frac{44 \pm \sqrt{(-44)^2-4\cdot(-8)\cdot 24}}{24\cdot 2} = \frac{44\pm 52}{48} = \begin{cases} 2 \\ -\frac{1}{6} \end{cases}$$

אבל שורש הנו אי שלילי, כלומר גדול או שווה ל-0, נשים לב כי אם

$x=-\frac{1}{6}$ נקבל כי השורש שווה למשהו שלילי ולכן פתרון זה נפסל!

$\boxed{x=2}$

$\sqrt{6x-5}-\sqrt{2x+3}=0$ $\qquad \sqrt{6x-5} = \sqrt{2x+3} \quad \backslash(\,)^2$

$6x-5=2x+3 \implies \boxed{x=2}$

$\sqrt{x-5}-\sqrt{x+2}=-1$ $\qquad \sqrt{x-5}+1=\sqrt{x+2} \quad \backslash(\,)^2$

$(\sqrt{x-5})^2+2\cdot 1\cdot\sqrt{x-5}+1^2 = (\sqrt{x+2})^2$

$x-5+2\sqrt{x-5}+1 = x+2 \implies 2\sqrt{x-5}=6 \quad \backslash(\,)^2$

$4(x-5)=36$

$4x-20=36 \implies \boxed{x=14}$

$\sqrt{x^2+4} - \sqrt{x^2-2} = 2$ $\qquad \sqrt{x^2+4} = 2 + \sqrt{x^2-2} \quad \backslash(\ )^2$

$$x^2+4 = 4 + 2\cdot 2\cdot\left(\sqrt{x^2-2}\right) + x^2 - 2$$

$$2 = 4\left(\sqrt{x^2-2}\right) \quad \backslash(\ )^2$$

$$4 = 16(x^2-2) \Rightarrow 16x^2 = 36$$

$$x^2 = \frac{36}{16} \Rightarrow \boxed{x = \pm\frac{3}{2}}$$

$\sqrt{12x+24} - \sqrt{4x-36} = \sqrt{12x-20} \quad \backslash(\ )^2$

$$12x+24 - 2\sqrt{(12x+24)(4x-36)} + 4x-36 = 12x-20$$

$$4x+8 = 2\sqrt{48x^2-336x-864} \quad \backslash :2$$

$$2x+4 = \sqrt{48x^2-336x-864} \quad \backslash(\ )^2$$

$$4x^2+16x+16 = 48x^2-336x-864$$

$$44x^2-352x-880=0 \qquad x_{1,2} = \frac{352 \pm \sqrt{(-352)^2-4\cdot 44\cdot(-880)}}{2\cdot 44}$$

$$= \frac{352 \pm 528}{88} \begin{matrix} \nearrow 10 \\ \searrow -2 \end{matrix}$$

אך נשים לב כי עבור $x=-2$ מתקבל דיסקרימיננטה שלילית ולכן נבחר

$$\boxed{x = 10}$$

$$\sqrt{x+1+2\sqrt{x}}=5 \quad /()^2 \quad \Rightarrow \quad x+1+2\sqrt{x}=25$$

$$2\sqrt{x}=24-x \quad /()^2$$

$$4x=576-48x+x^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-52x+576=0$$

$$x_{1,2}=\frac{52\pm\sqrt{(-52)^2-4\cdot 576}}{2}=\frac{52\pm 20}{2} \nearrow 36 \searrow 16$$

נציב $x=36$ ונקבל

$$\sqrt{36+1+2\sqrt{36}}=\sqrt{45}\neq 5$$

נציב $x=16$

$$\sqrt{16+1+2\sqrt{16}}=\sqrt{25}=5$$

לכן הפתרון הוא $\boxed{x=16}$, התווסף לנו פתרון מכיוון שהעלנו פעמיים בריבוע את המשוואה לכן יתכן ורק פתרון אחד מקיים את המשוואה!

$$\sqrt{x^2-8}+\sqrt{x^2-2}=\sqrt{x^2+8} \quad /()^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-8+2\sqrt{x^2-8}\sqrt{x^2-2}+x^2-2=x^2+8$$

$$2\sqrt{(x^2-8)(x^2-2)}=-x^2+18$$

$$2\sqrt{x^4-10x^2+16}=-x^2+18 \quad /()^2$$

$$4x^4-40x^2+64=x^4-36x^2+324$$

$$3x^4-4x^2-260=0$$

נציב $x^2=t$

$$3t^2-4t-260=0 \qquad t_{1,2}=\frac{4\pm 56}{6} \nearrow 10 \searrow -8\tfrac{2}{3}$$

מכיוון ש $t=x^2$ הוא t מספר אי שלילי לכן תשובה ב' נפסלת

$$t=x^2=10 \quad \Rightarrow \quad \boxed{x=\pm\sqrt{10}}$$

$\sqrt{2x^2-18} - \sqrt{x^2+9} = 0$

$$\sqrt{2x^2-18} = \sqrt{x^2+9} \quad /()^2$$

$$2x^2-18 = x^2+9 \Rightarrow x^2 = 27 \qquad x = \pm 3\sqrt{3}$$

$\sqrt{x-3} - 3 = \sqrt{x}$

$$\sqrt{x-3} = \sqrt{x} + 3 \quad /()^2$$

$$x-3 = x + 6\sqrt{x} + 9 \Rightarrow 6\sqrt{x} = -12$$

$\sqrt{x}$ לא יכול להיות מספר שלילי ולכן אין למשוואה את הפתרון ממשי

$\sqrt{x^2+2x-3} = 2x+6 \quad /()^2$

$$x^2+2x-3 = 4x^2+24x+36$$

$$3x^2+22x+39 = 0 \qquad x_{1,2} = \frac{-22 \pm \sqrt{(22)^2-4(39)\cdot 3}}{2\cdot 3} = \frac{-22\pm 4}{6}$$

$$x_1 = \frac{-13}{3} \qquad x_2 = -3$$

נציב את $x = \frac{-13}{3}$ ונקבל כי $2x+6$ מספר שלילי, פסול הפתרון (נפסל)

מכיוון ששורש הנו ביטוי אי שלילי ולכן הפתרון הנו $x=-3$

$(x^2+x)^2 - 14(x^2+x) + 24 = 0$

נציב $(x^2+x) = t$

$t^2 - 14t + 24 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{14 \pm \sqrt{(-14)^2 - 4\cdot 1\cdot 24}}{2\cdot 1} = \frac{14 \pm 10}{2} \begin{array}{l} \nearrow 12 \\ \searrow 2 \end{array}$$

כלומר מקרה ראשון:

$(x^2+x) = 12$

$x^2 + x - 12 = 0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} \boxed{x_1 = 3 \quad , \quad x_2 = -4}$

מקרה שני

$x^2 + x = 2$

$x^2 + x - 2 = 0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} \boxed{x_3 = 1 \quad x_4 = -2}$

$(x^2+4x)^2 - 17(x^2+4x) + 60 = 0$

נציב $t = (x^2+4x)$

$t^2 - 17t + 60 = 0$

$$t_{1,2} = \frac{17 \pm \sqrt{(-17)^2 - 4\cdot 1\cdot 60}}{2\cdot 1} = \frac{17 \pm 7}{2} \begin{array}{l} \nearrow 12 \\ \searrow 5 \end{array}$$

מקרה ראשון:

$x^2 + 4x = 12$

$x^2 + 4x - 12 = 0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} \boxed{x_1 = 2 \quad x_2 = -6}$

מקרה שני:

$x^2 + 4x = 5$

$x^2 + 4x - 5 = 0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} \boxed{x_3 = 1 \quad x_4 = -5}$

$(x^2 + 7x + 9)^2 - 6(x^2 + 7x + 9) = -9$

נציב $x^2 + 7x + 9 = t$

$t^2 - 6t = -9$

$t^2 - 6t + 9 = 0$

$t_{1,2} = \frac{6 \pm \sqrt{6^2 - 4 \cdot 9 \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{6 \pm 0}{2} = 3$

$x^2 + 7x + 9 = 3$

$x^2 + 7x + 6 = 0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} \boxed{x_1 = -1 \quad x_2 = -6}$

$(x^2 - 3x)^2 - 8(x - 2)(x - 1) - 30 = -26$

$(x^2 - 3x)^2 - 8(x^2 - 3x + 2) - 4 = 0$

$(x^2 - 3x)^2 - 8(x^2 - 3x) - 16 - 4 = 0$

נציב $(x^2 - 3x) = t$

$t^2 - 8t - 20 = 0$

$t_{1,2} = \frac{8 \pm \sqrt{8^2 - 4 \cdot (-20) \cdot 1}}{2 \cdot 1} = \frac{8 \pm 12}{2}$ $\nearrow 10$ $\searrow -2$

מקרה ראשון:

$x^2 - 3x = 10$

$x^2 - 3x - 10 = 0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} \boxed{x_1 = 5 \quad x_2 = -2}$

מקרה שני

$x^2 - 3x = -2$

$x^2 - 3x + 2 = 0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} \boxed{x_3 = 2 \quad x_4 = 1}$

$2(x+1)(x-5)(x-2)^2+3=-13$

נציב $x^2-4x=t$

$$2(x^2-5x+x-5)(x^2-4x+4)+16=0$$

$$2(t-5)(t+4)+16=0$$

$$2(t^2+4t-5t-20)+16=0 \qquad /:2$$

$$t^2-t-12=0 \qquad t_{1,2}=\frac{1\pm\sqrt{(-1)^2-4(-12)\cdot 1}}{2\cdot 1}=\frac{1\pm 7}{2} \begin{array}{l} \nearrow 4 \\ \searrow -3 \end{array}$$

מקרה ראשון:

$$x^2-4x=4$$

$$x^2-4x-4=0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} x_1=2+2\sqrt{2} \qquad x_2=2-2\sqrt{2}$$

מקרה שני:

$$x^2-4x=-3$$

$$x^2-4x+3=0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} x_1=3 \qquad x_2=1$$

$(2x^2+4x)(x^2+2x-7)=16$

נציב $t=x^2+2x$

$$2(x^2+2x)(x^2+2x-7)=16$$

$$2\cdot t\cdot(t-7)=16$$

$$2t^2-14t-16=0 \qquad t_{1,2}=\frac{14\pm\sqrt{(-14)^2-4(-16)\cdot 2}}{2\cdot 2}=\frac{14\pm 18}{4} \begin{array}{l} \nearrow 8 \\ \searrow -1 \end{array}$$

מקרה ראשון:

$$x^2+2x=8$$

$$x^2+2x-8=0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} x_1=2 \qquad x_2=-4$$

מקרה שני:

$$x^2+2x=-1$$

$$x^2+2x+1=0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} x_3=-1$$

$$(x+2)(x-3)\,x\,(x-1) = 72$$

$$(x^2-3x+2x-6)(x^2-x)=72$$

$$(x^2-x-6)(x^2-x)-72=0$$

נציב: $t=x^2-x$

$$(t-6)\cdot t-72=0$$

$$t^2-6t-72=0$$

$$t_{1,2}=\frac{6\pm\sqrt{(-6)^2-4(-72)}}{2\cdot 1}=\frac{6\pm 18}{2}\nearrow 12,\ \searrow -6$$

מקרה ראשון:

$$x^2-x=12$$

$$x^2-x-12=0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} x_1=4 \quad x_2=-3$$

מקרה שני:

$$x^2-x=-6$$

$$x^2-x+6=0 \xrightarrow{\text{נוסחת השורשים}} \text{אין פתרונות ממשיים}$$

$$\frac{x^2-3x}{(x-2)(x-1)}+\frac{(x-4)(x+1)}{(x-5)(x+2)}=\frac{34}{15}$$

$$\frac{x^2-3x}{x^2-3x+2}+\frac{x^2-3x-4}{x^2-3x-10}=\frac{34}{15}$$

נציב: $x^2-3x=t$

$$\frac{t}{t+2}+\frac{t-4}{t-10}=\frac{34}{15} \quad \Big\backslash\ 15(t+2)(t-10)$$

$$15t(t-10)+15(t-4)(t+2)=34(t+2)(t-10)$$

$$15t^2-150t+15t^2-30t-120=34t^2-272t-680$$

$$4t^2-92t-560=0 \qquad t_{1,2}=\frac{92\pm\sqrt{92^2-4\cdot(-560)\cdot 4}}{8}=\frac{92\pm 132}{8}\nearrow 28,\ \searrow -5$$

מקרה ראשון :

$$x^2-3x=28$$

$$x^2-3x-28=0 \xrightarrow{\text{נוסחאת השורשים}} x_1=7 , \quad x_2=-4$$

מקרה שני :

$$x^2-3x=-5$$

$$x^2-3x+5=0 \xrightarrow{\text{נוסחאת השורשים}}$$

אין פתרונות ממשיים