5. **מתוך בגרות חורף 2007**

נתונה הפונקציה $f(x)$ המוגדרת על ידי $f(x) = \frac{5+2x}{4-x^2}$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה.

ב. מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים

ג. מצא את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים

ד. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגן.

ה. שרטט סקיצה של גרף הפונקציה

ו. לאילו ערכי $m$ אין פתרון למשוואה $f(x) = m$ ?

א) ת"ה:

$4-x^2 \neq 0$

$x \neq 2$ , $x \neq -2$

ת. עזר:

$4-x^2=0$

$(2-x)(2+x)=0$

$x=2$ $\quad$ $x=-2$

ב) חיתוך עם x: $(y=0)$

$0 = \frac{5+2x}{4-x^2}$

$0 = 5+2x$

$2x=-5$

$x=-2.5$

$(-2.5, 0)$

חיתוך עם y: $(x=0)$

$f(0) = \frac{5+2\cdot 0}{4-0^2} = \frac{5}{4}$

$(0, \frac{5}{4})$

ג) אס' אנכית: $x=2, x=-2$

אס' אופקית: $y=0$ , הביטוי עם החזקה הגבוהה ביותר נמצא במכנה.

ד)

$$f'(x) = \frac{2(4-x^2) + (5+2x)\cdot 2x}{(4-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{8 - 2x^2 + 10x + 4x^2}{(4-x^2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{2x^2 + 10x + 8}{(4-x^2)^2}$$

$$0 = 2x^2 + 10x + 8$$

$x = -1$ $\quad$ $x = -4$

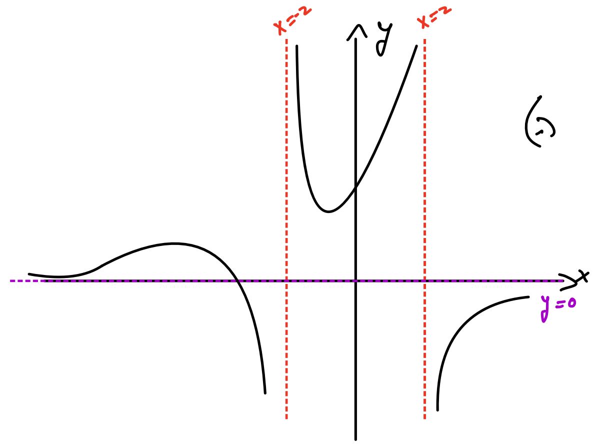
| $x$ | $-5$ | $-4$ | $-3$ | $-2$ | $-\frac{3}{2}$ | $-1$ | $0$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | + | 0 | − | | − | 0 | + | | + |
| $f(x)$ | ↗ | max | ↘ | | ↘ | min | ↗ | | ↗ |

$f'(-5) = \frac{8}{441}$, $f'(-3) = -\frac{4}{25}$, $f'(-\frac{3}{2}) = -\frac{40}{49}$, $f'(0) = \frac{1}{2}$, $f'(3) = \frac{56}{25}$

$f(-4) = \frac{1}{4}$, $f(-1) = 1$

$max(-4, \frac{1}{4})$ , $min(-1, 1)$

ה)




1) כאשר $\frac{1}{4} < m < 1$ אין למשוואה פתרון.
הישר מהצורה $y=m$ הוא ישר המקביל לציר x.
מכיוון שישנה נק' מקסימום שערך ה-y שלה הוא
$\frac{1}{4}$ ונק' מינימום שערך ה-y שלה הוא 1 ובנוסף
יש אס' אנכית שלא משנה את כיוון הפונקציה (נוצר טווח ערכים
שבהם אין לפונקציה אף נקודה.

12. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{5x^2-a}{-x^2+4}, a<0$

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה

ב. הבע באמצעות $a$ את נקודות הקיצון וקבע את סוגן.

ג. הבע באמצעות $a$ את נקודות החיתוך עם הצירים

ד. מצא את האסימפטוטות המקבילות לצירים.

**נתון**: שיפוע המשיק לגרף הפונקציה בנקודה שבה $x=1$ הוא $\frac{16}{3}$

ה. מצא את $a$.

ו. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$

הגדירו פונקציה חדשה $g(x)=|fx|$

ז. סרטט סקיצה של הפונקציה $g(x)$.

א) ת"ה: $x \neq \pm 2$

$-x^2+4 \neq 0$

ת. עזר:

$-x^2+4=0$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

ב)

$$f'(x)=\frac{10x(4-x^2)+(5x^2-a)\cdot 2x}{(-x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(5(4-x^2)+5x^2-a)}{(-x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(20-\cancel{5x^2}+\cancel{5x^2}-a)}{(-x^2+4)^2}$$

$$f'(x)=\frac{2x(20-a)}{(-x^2+4)^2}$$

$$0 = 2x(20-a)$$

$$x = 0$$

| $x$ | $-3$ | $-2$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
| --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- | --- |
| $f'(x)$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ | | $+$ |
| $f(x)$ | $\searrow$ | | $\searrow$ | min | $\nearrow$ | | $\nearrow$ |

$$f'(x) = \frac{2x(20-a)}{(-x^2+4)^2}$$

נשים לב כי המכנה תמיד חיובי והסוגריים $(20-a)$ גם תמיד חיובי מכיוון ש- $a$ שלילי. לכן הנגזרת תהיה שלילית כאשר $x$ שלילי, וחיובית כאשר $x$ חיובי.

$$f(0) = -\frac{a}{4}$$

$$\min\left(0, -\frac{a}{4}\right)$$

ג)

חיתוך עם $x$: $(y=0)$

$$0 = 5x^2 - a$$

$$x^2 = \frac{a}{5}$$

$$x = \pm\sqrt{\frac{a}{5}}$$

$$\left(\pm\sqrt{\frac{a}{5}}, 0\right)$$

חיתוך עם $y$: $(x=0)$

$$\left(0, -\frac{a}{4}\right)$$

ג)

אס׳ אנכיות: $x=2$ , $x=-2$

אס׳ אופקית: $y=-5$ , חוקית מקצנים.

ה) מהנתון נבנה את המשוואה $f'(1)=\frac{16}{3}$

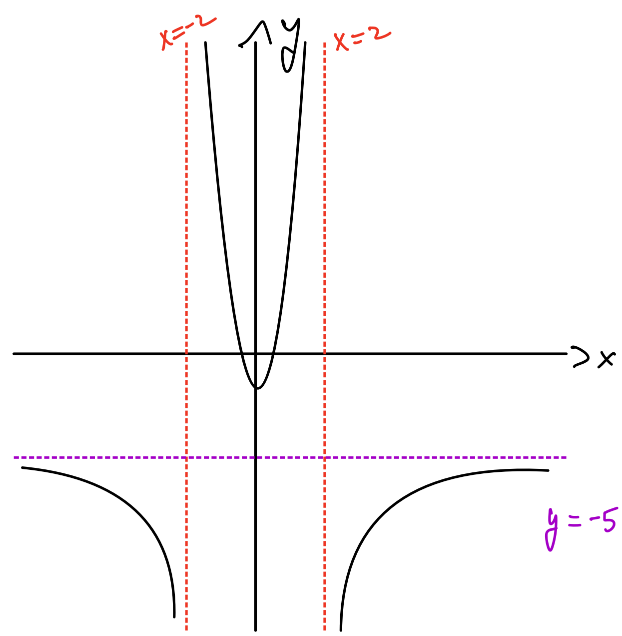
$$\frac{2\cdot 1(20-a)}{(-1^2+4)^2}=\frac{16}{3}$$

$$\frac{40-a}{9}=\frac{16}{3}$$

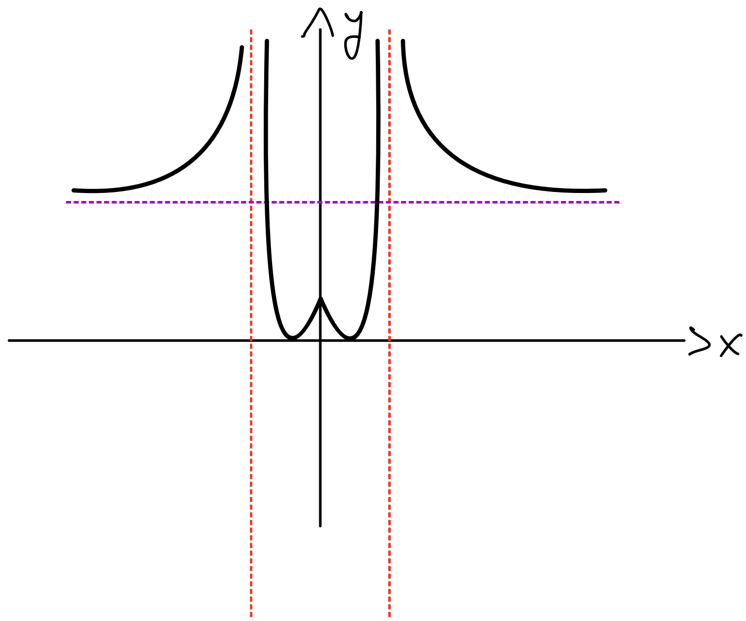
$$40-a=48$$

$$a=-8$$

ו)



ג)




כאשר הפונקציה בתוך ערך מוחלט, כל ערך y שהיה שלילי הופך להיות חיובי. ז"א כל הפונקציה מעל ציר x.

בתוצאה מזה כל חיתוך עם ציר x הופך לקיצון על הציר.

כל נק' קיצון אשר נמצאות מתחת לציר ה-x משנה את סוגה.

עמ' 82

**14. מתוך בגרות קיץ 2008 מועד ב'**

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{-x^2+4x-12}{2x^2}$, מצא:

א. את תחום ההגדרה של הפונקציה

ב. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים

ג. את השיעורים של נקודת הקיצון של הפונקציה, וקבע את סוגה.

ד. סרטט סקיצה של הפונקציה

ה. קבע אם יש פתרון למשוואה $f(x) = 0$, נמק.

א) ת"ה: $x \neq 0$

$2x^2 \neq 0$

ת.עזר

$2x^2 = 0$

$x = 0$

ב) אס' אנכית: $x=0$.

נובע מת"ה ולאחר שבדקנו ש $x=0$ לא מאפס את המונה.

אס' אופקית: $y = -\frac{1}{2}$

החזקה הגבוהה ביותר נמצאת הן במונה והן במכנה לכן נבצע חלוקת מקדמים ונקבל $-\frac{1}{2}$.

ג)

$$f'(x) = \frac{(-2x+4)\cdot 2x^2 - (-x^2+4x-12)\cdot 4x}{4x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-\cancel{4x^3} + 8x^2 + \cancel{4x^3} - 16x^2 + 48x}{4x^4}$$

$$f'(x) = \frac{-8x^2+48x}{4x^4}$$

נשווה מונה ל-0.

$$-8x^2+48x=0$$

$$-8x(x-6)=0$$

$\cancel{x=0}$ $\qquad$ $x=6$

נפסל עקב ת"ה.

| $x$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $6$ | $8$ |
|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $-$ | | $+$ | $0$ | $-$ |
| $f(x)$ | ↘ | | ↗ | max | ↘ |

$f'(-1)=-14$

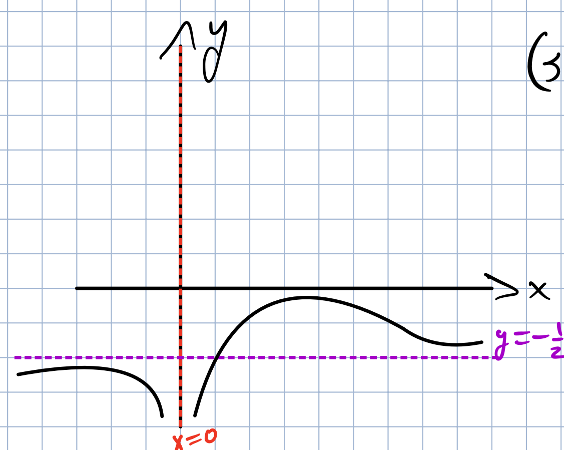
$f'(1)=10$

$f'(8)=-\frac{1}{128}$

$f(6)=-\frac{1}{3}$

$max\left(6,-\frac{1}{3}\right)$

ג)




ה) אין פתרון. הפונקציה כולה מתחת לציר ה-x ולכן אין אף ערך x אשר מקבל ערך y ששווה ל-0.

15. **מתוך בגרות קיץ 2008 מועד א**

נתונה הפונקציה $f(x) = \frac{a-x^2}{x^2-2}$, $a$ הוא פרמטר שונה מ-2.

לפונקציה יש נקודת קיצון אחת.

א. מצא את שיעורי ה-$x$ של נקודת הקיצון, והבע באמצעות $a$ את שיעור ה-$y$ שלה.

ישר, המשיק לפונקציה בנקודה שבה $y = -4.5$ מקביל לציר ה-$x$.

ב. מצא את הערך של $a$.

א)

$$f'(x) = \frac{-2x(x^2-2)-(a-x^2)\cdot 2x}{(x^2-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(\cancel{x^2}-2+a-\cancel{x^2})}{(x^2-2)^2}$$

$$f'(x) = \frac{-2x(a-2)}{(x^2-2)^2}$$

נשווה מונה ל-0.

$$0 = -2x(a-2)$$

$$x=0$$

מכיוון שלא ידוע לנו כלום על ערכו של $a$ לא נוכל להציב ערכים בנגזרת ולגלות סוג $x=0$ קיצון. לכן, נתון שאכן יש קיצון אחד בלבד. קיבלנו ערך $x$ 1 בלבד חשוד. מכאן ש- $x=0$ קיצון.

כעת נציב $x=0$ בפונקציה ונמצא את ערך ה-$y$.

$$f(0) = -\frac{a}{2}$$

$\left(0, -\frac{a}{2}\right)$

נק' קיצון.

ב) תחילה נציב $y=-4.5$ ונמצא את ערך ה-$y$ של הנק'.
לאחר מכן נציב ערך $x$ זה בנגזרת ונשווה אותה ל-0.
שיפועו של ישר המקביל לציר ה-$x$ הוא 0.

$$-4.5=\frac{a-x^2}{x^2-2} \quad /\cdot(x^2-2)$$

$$-4.5x^2+9=a-x^2$$

$$9-a=3.5x^2$$

$$\frac{9-a}{3.5}=x^2$$

$$x=\sqrt{\frac{9-a}{3.5}}$$

$$0=\frac{-2\cdot\sqrt{\frac{9-a}{3.5}}\cdot(a-2)}{\left(\sqrt{\frac{9-a}{3.5}}^{2}-2\right)^2} \quad /\cdot \text{מכנה}$$

$$0=-2\cdot\sqrt{\frac{9-a}{3.5}}\cdot(a-2)$$

$$\Downarrow \qquad \longrightarrow a\cancel{=}2$$

$a\neq 2$ נתון

$$\frac{9-a}{3.5}=0$$

$$9-a=0$$

$$9=a$$

המשך פתרון שאלה 15

$\Downarrow$

הצב את הערך של $a$ ומצא:

ג. את תחום ההגדרה של הפונקציה

ד. את האסימפטוטות של הפונקציה המקבילות לצירים.

ה. את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים.

ו. את תחומי העליה ותחומי הירידה של הפונקציה.

ז. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה.

$$f(x)=\frac{9-x^2}{x^2-2} \quad , \quad f'(x)=\frac{-2x(9-2)}{(x^2-2)^2}$$

ג) ת"ה:

$x \neq \pm\sqrt{2}$

$x^2-2 \neq 0$

ת. עזר:

$x^2-2=0$

$x^2=2$

$x=\pm\sqrt{2}$

ד) אס' אנכית: $x=\pm\sqrt{2}$

נובע מת"ה ובדיקה שת"ה לא מאפס את מונה.

אס' אופקית: $y=-1$

ר. ביטוי עם החזקה הגבוהה ביותר (נמצא הן במונה והן במכנה)
לכן נבצע חלוקת מקדמים ונקבל $y=-1$.

ה) חיתוך עם x: $(y=0)$

$$0=\frac{9-x^2}{x^2-2}$$

$$0=9-x^2$$

$$x^2=9$$

$$x=\pm 3$$

$(3,0)$ , $(-3,0)$

חיתוך עם y: $(x=0)$

$$f(0)=\frac{9-0^2}{0^2-2}=-\frac{9}{2}=-4.5$$

$(0,-4.5)$

ו) כעת נעשה טבלה.

| $x$ | $-3$ | $-\sqrt{2}$ | $-1$ | $0$ | $1$ | $\sqrt{2}$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $+$ | | $+$ | $0$ | $-$ | | $-$ |
| $f(x)$ | ↗ | | ↗ | max | ↘ | | ↘ |

$f'(-3)=\frac{6}{7}$

$f'(-1)=14$

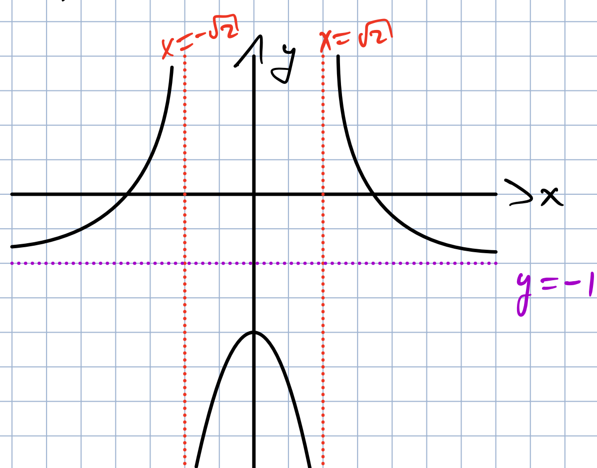
$f'(1)=-14$

$f'(3)=-\frac{6}{7}$

עלייה: $-\sqrt{2}<x<0$ , $-\sqrt{2}>x$

ירידה: $\sqrt{2}<x$ , $0<x<\sqrt{2}$

ז)



עמ' 103

9. **מתוך בגרות קיץ 1999**

נתונה הפונקציה $y = \frac{x}{\sqrt{x}-1}$

א. מהו תחום ההגדרה של הפונקציה?

ב. מה הן נקודות החיתוך של גרף הפונקציה עם הצירים?

ג. מצא את נקודות הקיצון של הפונקציה

ד. מהן תחומי העלייה והירידה של הפונקציה?

ה. מצא את האסימפטוטות המאונכות לצירים של פונקציה

ו. היעזר בסעיפים א-ה וצייר סקיצה של גרף הפונקציה

א) ת"ה:

$x \geq 0$ וגם $\sqrt{x} - 1 \neq 0$

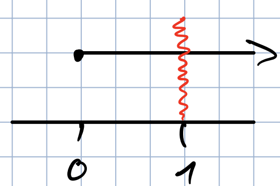
ת.עזר:

$\sqrt{x}-1=0$

$\sqrt{x}=1 \quad /()^2$

$x=1$

$x\neq 1$ כלומר



$0 \leq x < 1$

$1 < x$

ב) חיתוך עם ציר x: $y=0$

$0=\frac{x}{\sqrt{x}-1}$

$0=x$

$(0,0)$

גם עם ציר y.

ג)

$$f'(x) = \frac{1\cdot(\sqrt{x}-1) - x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

$$f'(x) = \frac{\sqrt{x} - 1 - \frac{x}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x}-1)^2}$$

נשווה מונה ל-0.

$$0 = \sqrt{x} - 1 - \frac{x}{2\sqrt{x}} \quad / \cdot 2\sqrt{x}$$

$$0 = 2x - 2\sqrt{x} - x$$

$$0 = x - 2\sqrt{x}$$

$$0 = \sqrt{x}(\sqrt{x}-2)$$

$x=0$ , $x=4$

| $x$ | $0$ | $\frac{1}{2}$ | $1$ | $2$ | $4$ | $5$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $f'(x)$ | $0$ | $-$ | | $-$ | $0$ | $+$ |
| $f(x)$ | max | ↘ | | ↘ | min | ↗ |

$f'(\frac{1}{2}) = -7.53$

$f'(2) = -1.7$

$f'(5) = 0.07$

$f(0) = 0$ , $f(4) = 4$

$max(0,0)$ , $min(4,4)$

ד)

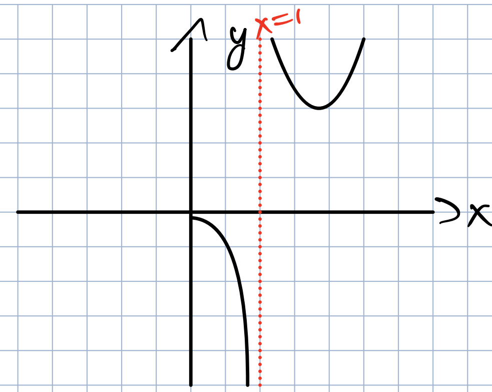
ת. עליה: $4<x$

ת. ירידה: $0<x<1$ , $1<x<4$

ה) אס' אנכית: $x=1$ , מת"ה ומכנה שלא מתאפס המונה.

אס' אופקית: אין. הביטוי עם החזקה הגבוהה ביותר נמצא במונה.

(1




עמ' 103

12. **מתוך בגרות קיץ 2010**

נתונות 3 פונקציות:

$$k > 0 \,, f(x) = \sqrt{x+k} \,,\ g(x) = x\sqrt{x+k} \,,\ h(x) = \frac{\sqrt{x+k}}{x}$$

א. הבע באמצעות $k$ את תחום ההגדרה של כל אחת מהפונקציות.

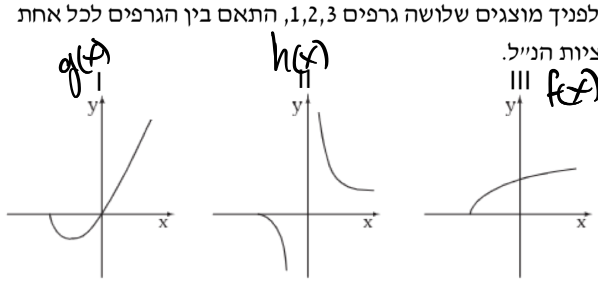
כל אחד מהגרפים של הפונקציות חותך את ציר ה-$x$ בחלקו השלילי באותה נקודה.

ב. הבע באמצעות k את שיעורי ה-x של נקודת חיתוך זו.

ג. אורך הקטע, המחבר את נקודות החיתוך עם הצירים של גרף $f(x)$ הוא $\sqrt{6}$. מצא את הערך של k.

הצב $k = 2$, וענה על הסעיפים הבאים:

ד. בציור שלפניך מוצגים שלושה גרפים 1,2,3, התאם בין הגרפים לכל אחת מהפונקציות הנ"ל.




ה. מצא את פונקציית הנגזרת של הפונקציה שהגרף שלה הוא 2 והוכח כי פונקציית הנגזרת שמצאת היא שלילית בכל תחום ההגדרה של פונקציה 2.

ו. רשום את תחומי הירידה של הפונקציה שהגרף שלה הוא 2.

(א

| ת"ה: | $h(x)$ | $g(x)$ | $f(x)$ |
|---|---|---|---|
| $x \neq 0$ ואם | $x+k \geq 0$ | $x+k \geq 0$ | $x+k \geq 0$ |
| | $x \geq -k$ | $x \geq -k$ | $x \geq -k$ |

ב) (מצא) חיתוך עם x של אחת הפונקציות ונשליך זו על כולן.

$(f(x))$ חיתוך עם x: $(y=0)$

$0=\sqrt{x+k}$

$0=x+k$

$x=-k$

$(-k,0)$

ג) $(f(x))$ חיתוך עם y: $(x=0)$

$f(0)=\sqrt{0+k}=\sqrt{k}$

$(0,\sqrt{k})$

$d=\sqrt{(0+k)^2+(\sqrt{k}-0)^2}=\sqrt{6} \quad /()^2$

$k^2+k=6$

$k^2+k-6=0$

$k=2 \qquad k\neq -3$

נתון $k>0$

א)

גרף I:

$g(x)$ - מכיוון שרק ל- $g(x)$ יש חיתוך ב- $(0,0)$.

גרף II:

$h(x)$ - מכיוון שרק ל- $h(x)$ יש אס' אנכית.

גרף III:

$f(x)$ - הגרף הנותר. $f$ החיתוך עם y לא ב- $(0,0)$.

ד)

$$h'(x)=\frac{\frac{1}{2\sqrt{x+2}}\cdot x-\sqrt{x+2}\cdot 1}{x^2}$$

$$h'(x)=\frac{\frac{x}{2\sqrt{x+2}}-\sqrt{x+2}}{x^2}$$

$$h'(x)=\frac{x-2(x+2)}{2x^2\sqrt{x+2}}$$

$$h'(x)=\frac{x-2x-4}{2x^2\sqrt{x+2}}$$

$$h'(x)=\frac{-x-4}{2x^2\sqrt{x+2}}$$

$$0=-x-4$$

$$x\cancel{=-}4$$

ת"ה $x \geq$ -א כלומר $x \geq -2$

אם נסתכל על הנגזרת ונשים לב כי המכנה חיובי תמיד.
מכאן שרק סימן המונה יקבע חיוביות שליליות.
מכיוון ש-$x \geq -2$ כל הצבה תגרור מונה שלילי.
גם כשנציב ונציב את ה-$x$ הקטן ביותר $x=-2$ עדיין נקבל מונה $= -2$.
הנגזרת שלילית לכל $x$ בת"ה.

1) ת. ירידה: $-2<x<0$ , $0<x$