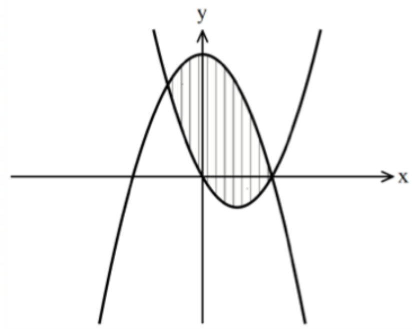
מתוך בגרות קיץ 2003 – מועד ב'



נתונות הפונקציות :

$$f(x) = x^2 - 4x$$

$$g(x) = -x^2 + 16$$

חשב את השטח המסומן בציור. שטח זה מוגבל בין שני הגרפים וציר ה-x.

נחפש את החיתוך שתי הפונ':

$$x^2 - 4x = -x^2 + 16$$

$$2x^2 - 4x - 16 = 0$$

פתרון עם נוסחאת השורשים ונקבל:

$$x = -2 \quad , \quad x = 4$$

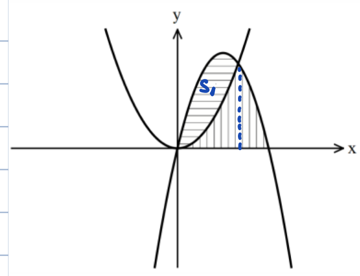
נבצע אינטגרציה של הפונ' העליונה פחות התחתונה, ניתן להבחין מציור שהתחתונה מחויבת ואז העליונה בוכה:

$$S = \int_{-2}^{4} -x^2 + 16 - (x^2 - 4x)\,dx = \int_{-2}^{4} -2x^2 + 4x + 16\,dx = \left[\frac{-2x^3}{3} + 2x^2 + 16x\right]\Big|_{-2}^{4}$$

$$= \left(\frac{-2\cdot 4^3}{3} + 2\cdot 4^2 + 16\cdot 4\right) - \left(\frac{-2\cdot(-2)^3}{3} + 2\cdot(-2)^2 + 16\cdot(-2)\right) = 72$$

השטח הכלוא מתחת לגרף הינו 72 יח"ר

מתוך בגרות קיץ 2001 – מועד ב'



לפניכם הגרפים של הפונקציות : $f(x)=\frac{1}{2}x^2$

ו- $g(x)=-x^2+6x$.

S_1 הוא השטח הכלוא בין הגרפים של שתי הפונקציות. S_2

הוא השטח הכלוא בין שתי הגרפים וציר ה-x. מצא את

היחס : $\frac{S_1}{S_2}$.

נחשב את נק' החיתוך של הגרפים:

$$\frac{1}{2}x^2=-x^2+6x$$

$$1.5x^2-6x=0$$

$$x(1.5x-6)=0$$

$$x=0 \qquad x=4$$

בנוסף ניתן לשים לב כי $g(x)$ חותך את ציר ה-x ב $(0,0)$ ו $(6,0)$

נחשב את S_1 ע"י אינטגרציה:

$$S_1=\int_0^4 -x^2+6x-\frac{1}{2}x^2\,dx=\int_0^4 -1.5x^2+6x\,dx=\left[\frac{-1.5x^3}{3}+3x^2\right]\Big|_0^4=16$$

כעת נחשב את S_2, בשביל הנוחות נחלק אותו ל-2:

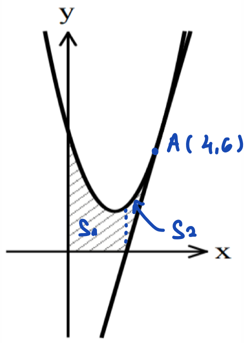
$$S_{2(1)}=\int_0^4 \frac{1}{2}x^2\,dx=\left[\frac{x^3}{6}\right]\Big|_0^4=\frac{32}{3}$$

$$S_{2(2)}=\int_4^6 -x^2+6x\,dx=\left[\frac{-x^3}{3}+3x^2\right]\Big|_4^6=\frac{28}{3}$$

$$S_2=20$$

לכן היחס $\frac{S_2}{S_1}$ הנו $\frac{20}{16}$ כלומר $\frac{5}{4}$

מתוך בגרות קיץ 2001



לגרף הפונקציה $f(x) = x^2 - 4x + 6$ העבירו משיק בנקודה $A\,(4,6)$.

א. מצא את משוואת המשיק

ב. מצא את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, המשיק והצירים.

א. נמצא את שיפוע הפו' בנק' A:

$$f'(x) = 2x - 4$$

$$f'(4) = 2\cdot 4 - 4 = 4$$

כעת יש לנו שיפוע ונק' נחשב את משוואת המשיק:

$$y - 6 = 4(x-4)$$

משוואת המשיק שלנו היא: $y = 4x - 10$

בשביל לחשב את השטח נצטרך לחלק את השטח לשני שטחים נפרדים,

ראשית נמצא את חיתוך המשיק עם ציר x:

$$4x - 10 = 0 \Rightarrow x = 2.5$$

את S_1 נמצא באמצעות אינטגרל:

$$S_1 = \int_0^{2.5} x^2 - 4x + 6\,dx = \left[\frac{x^3}{3} - 2x^2 + 6x\right]\Bigg|_0^{2.5} = \frac{185}{24}$$

S_2 - השטח הכלוא בין 2 פונ':

$$S_2 = \int_{2.5}^{4} x^2 - 4x + 6 - (4x - 10)\,dx = \int_{2.5}^{4} x^2 - 8x + 16\,dx =$$

$$= \left[\frac{x^3}{3} - 4x^2 + 16x\right]\Bigg|_{2.5}^{4} = 1.125$$

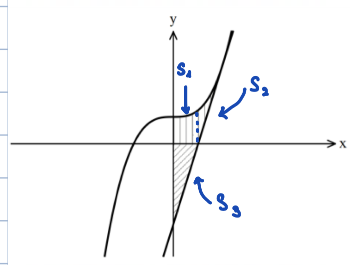
$$S = \frac{185}{24} + 1.125 = 8\frac{5}{6}$$

לכן השטח הכולל הוא $8\frac{5}{6}$ יח"ר

מתוך בגרות קיץ 1994

לגרף הפונקציה $f(x) = x^3 + 4$ נהעבירו משיק בנקודה

שבה $x = 2$.



א. מצא את משוואת המשיק

ב. ציר ה-x מחלק את השטח המוגבל על ידי גרף

הפונקציה, המשיק וציר ה-y לשני חלקים. הראה כי

שני החלקים (השטחים המסומנים) שווים בשטחם.

א. בשביל למצוא את משוואת המשיק נמצא את השיפוע וערך ה-y של הנק'

בנק' $x=2$

$f(2) = 2^3 + 4 = 12$

$(2, 12)$

$f'(2) = 3 \cdot 2^2 = 12$

כעת אנו יודעים שיפוע ונק' ונרשום את משוואת המשיק

$y - 12 = 12(x-2)$

$y = 12x - 12$

קיבלנו שמשוואת המשיק היא $y = 12x - 12$

ב. בכדי לחשב את השטחים נצטרך לחלק ל-3 חלקים S_1, S_2, S_3 כפי שמסומן

בציור. נמצא את נק' החיתוך של המשיק עם ציר x ו-y

עם ציר x:

$0 = 12x - 12 \Rightarrow (1, 0)$

עם ציר y:

$y = -12 \qquad (0, -12)$

נחשב את S_1:

$$S_1 = \int_0^1 x^3 + 4\,dx = \left[\frac{x^4}{4} + 4x\right]\Big|_0^1 = 4\frac{1}{4}$$

נחשב את S_2:

$$S_2 = \int_1^2 x^3 + 4 - (12x - 12)\,dx = \int_1^2 x^3 - 12x + 16\,dx = \left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 + 16x\right]\Big|_1^2 = \frac{7}{4}$$

נחשב את S_3 - לפי שטח משולש:

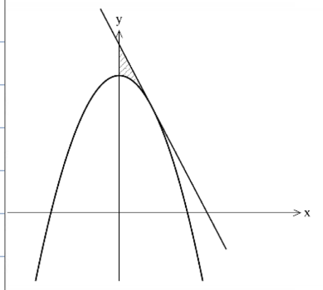
$$S_3 = \frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 12 = 6$$

כעת ניתן לשים לב כי:

$$S_1 + S_2 = 6 = S_3$$

מש״ל

מתוך בגרות קיץ 1993



נתונה פרבולה שמשוואתה $y = ax^2 + 8$, $a < 0$.

ידוע כי ערך הנגזרת בנקודה שבה $x = 2$, $f'(2) = -2$.

א. חשב את a

ב. מצא את משוואת המשיק לפונקציה בנקודה שבה $x = 2$

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפרבולה, המשיק שמצאת בסעיף א' וציר

ה-y (השטח המסומן)

א. בכדי לחשב את a נמצא את הנק' על הפרבולה ששיפועה -2 ומקיימת $x=2$

$y' = 2ax$, $y'(2) = 2a \cdot 2 = -2$

$\Rightarrow$ $a = -\frac{1}{2}$

ב. נמצא את נק' ההשקה (את השיפוע נתון כבר וידעים)

$y(2) = -\frac{1}{2} \cdot 2^2 + 8 = 6$

נמצא משוואת משיק לפי נק' ושיפוע:

$y - 6 = -2(x-2)$

$y = -2x + 10$

ג. נמצא את השטח ע"י אינטגרציה:

$$S = \int_0^2 -2x+10-\left(-\frac{1}{2}x^2+8\right)dx = \int_0^2 \frac{1}{2}x^2-2x+2\,dx = \frac{x^3}{6}-x^2+2x\Big|_0^2 = \frac{4}{3}$$

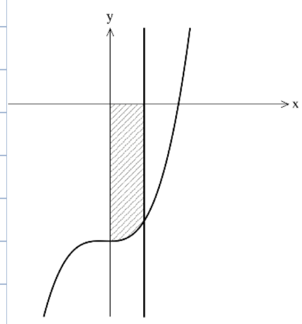
השטח המבוקש הינו $\frac{4}{3}$ יח"ר

מתוך בגרות קיץ 1998

נתונה הפונקציה $f(x) = ax^3 + x^2 - 20$. לפונקציה יש נקודת קיצון בנקודה שבה $x = -\frac{1}{3}$.

א. חשב את a

ב. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה, הצירים והישר $x = 1$.



א. בנק' הקיצון הנגזרת מתאפסת, נשתמש בנתון זה בכדי למצוא את a:

$$f'(x) = 3ax^2 + 2x$$

$$f'\left(-\tfrac{1}{3}\right) = \frac{1}{3}a - \frac{2}{3} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{a = 2}$$

ב. נחשב את השטח באמצעות אינטגרל:

$$S = \int_0^1 0 - (2x^3 + x^2 - 20)\,dx = \int_0^1 -2x^3 - x^2 + 20\,dx = \left[-\frac{1}{2}x^4 - \frac{x^3}{3} + 20x\right]\Big|_0^1$$

$$= 19\frac{1}{6}$$

לכן השטח המבוקש הוא $19\frac{1}{6}$

מתוך בגרות קיץ מועד ב' 2005

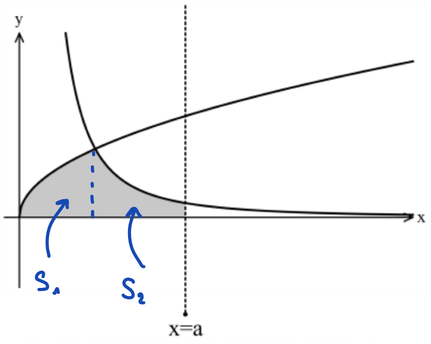
נתונות שתי הפונקציות $f(x) = \sqrt{4x}$,$g(x) = \frac{2}{x^2}$

בתחום שבו $x > 0$.

S הוא השטח המוגבל על ידי הגרפים של שתי

הפונקציות, על ידי ציר ה-x והישר $x = a$ כאשר $a >$

1. נתון כי $S = \frac{7}{3}$, מצא את a.



על מנת לחשב את השטח נצטרך לחלק אותו ל-2: S_1, S_2. נעשה זאת ע"י

מציאת החיתוך בין שני הגרפים:

$$\frac{2}{x^2} = \sqrt{4x} \quad / ()^2$$

$$\frac{4}{x^4} = 4x \Rightarrow 4x^5 = 4 \Rightarrow x = 1$$

נחשב את S_1:

$$S_1 = \int_0^1 \sqrt{4x}\,dx = 2\int_0^1 x^{\frac{1}{2}}\,dx = 2 \cdot \left[\frac{x^{1\frac{1}{2}}}{1.5}\right]\Bigg|_0^1 = \frac{4}{3}$$

נחשב את S_2:

$$S_2 = \int_1^a \frac{2}{x^2}\,dx = 2\int_1^a x^{-2}\,dx = 2 \cdot \frac{-1}{x}\Bigg|_1^a =$$

$$\frac{-2}{a} - (-2) = 2 - \frac{2}{a}$$

לפי נתוני השאלה: $S = \frac{7}{3}$ כלומר

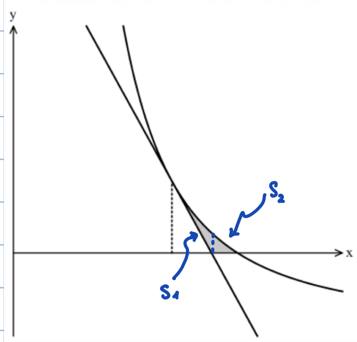
$$\frac{4}{3} + 2 - \frac{2}{a} = \frac{7}{3}$$

$$\frac{2}{a} = 1 \Rightarrow a = 2$$

$a = 2$

נתון גרף הפונקציה $f(x)=\frac{a}{x^2}+b$ בתחום שבו $x>0$. המשיק לגרף הפונקציה

בנקודה $(1\,,1)$ מאונך לישר $y=\frac{1}{4}x-4$.



א. מצא את a ו-b

ב. מצא את משוואת המשיק

ג. חשב את השטח המוגבל על ידי גרף הפונקציה,

המשיק שמצאת בסעיף ב' וציר ה-x

א. אנו יודעים כי מכפלת ישרים מאונכים שווה -1 ולכן השיפוע של המשיק הינו

$\frac{1}{4}\cdot m=-1 \Rightarrow m=-4$

בנוסף בנק' ההשקה $(1,1)$ השיפוע של המשיק וגרף הפונ' שווים לכן:

$f'(x)=\frac{-2ax}{x^4}$ $\qquad f'(1)=-2a=-4$

$a=2$

הפונ' עוברת דרך $(1,1)$ ולכן

$f(1)=\frac{2}{1^2}+b=1$

$b=-1$

ב. את משוואת המשיק נחשב לפי נק' ושיפוע

$y-1=-4(x-1)$

$y=-4x+5$

ג. נחלק את השטח ל-2 ונמצא את חיתוך המשיק עם ציר ה-x:

$-4x+5=0 \Rightarrow x=\frac{5}{4}$

$S_1=\int_1^{\frac{5}{4}}\frac{2}{x^2}-1-(-4x+5)\,dx=\int_1^{\frac{5}{4}}\frac{2}{x^2}+4x-6\,dx$

$$= \left[\frac{-2}{x} + 2x^2 - 6x\right]\Bigg|_1^{\frac{5}{4}} = \left(\frac{-239}{40}\right) - (-6) = \frac{1}{40}$$

נמצא את חיתוך הפונ׳ עם ציר ה- x:

$$\frac{2}{x^2} - 1 = 0$$

$$x^2 = 2 \Rightarrow x = \sqrt{2}$$

שטח S_2:

$$S_2 = \int_{\frac{5}{4}}^{\sqrt{2}} \frac{2}{x^2} - 1 \, dx = \left[\frac{-2}{x} - x\right]\Bigg|_{\frac{5}{4}}^{\sqrt{2}} = (-2\sqrt{2}) - \left(-\frac{57}{20}\right)$$

שט $S = S_1 + S_2 = 0.0465$

מתוך בגרות חורף 1991

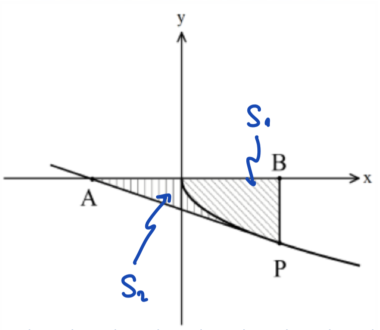
מעבירים ישר המשיק לפרבולה $f(x) = -\sqrt{4x}$. בנקודה

$P(9\,,-6)$. הישר חותך את ציר ה-x בנקודה A. מורידים

אנך מנקודה P לציר ה-x אשר חותך את הציר בנקודה B

(ראה ציור). הוכח כי גרף הפרבולה מחלק את שטח המשולש

ΔABP לשני שטחים שהיחס בינהם הוא $1:2$.



נצטרך לחשב 3 שטחים. בשביל זה נחשב את משוואת המשיק:

$$f'(x) = \frac{-4}{2\sqrt{4x}} \qquad f'(9) = \frac{-4}{2\cdot\sqrt{36}} = -\frac{1}{3}$$

$$y+6 = -\frac{1}{3}(x-9)$$

$$y = -\frac{1}{3}x - 3$$

לכן ניתן לראות כי $A\ (-9,0)$

נחשב את שטח המשולש ABP וממנו נחסיר את שטח S_1 ונגיע לS_2

$$A(-9,0),\ P(9,-6),\ B(9,0)$$

$$S_{\Delta ABP} = \frac{1}{2}\cdot 18\cdot 6 = 54$$

$$S_1 = \int_0^9 0-(-\sqrt{4x})\,dx = \int_0^9 2\sqrt{x}\,dx = 2\int_0^9 x^{\frac{1}{2}}\,dx = \frac{2\cdot x^{1.5}}{1.5}\Bigg|_0^9 = 36$$

$$\Rightarrow S_2 = S_{\Delta ABP} - S_1 = 18$$

$$\frac{S_1}{S_2} = \frac{36}{18} = 2$$

היחס בין S_1 ל S_2 הוא $1:2$

מתוך בגרות קיץ 1988

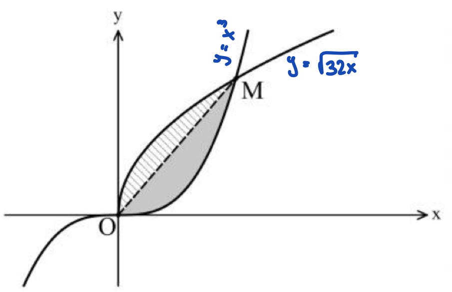
הגרפים של הפונקציות $y = x^3$ ו-$y = \sqrt{32x}$

עוברים דרך ראשית הצירים $(0\,,0)$ ונפגשים

בנקודה נוספת, נקודה M. הישר OM מחלק את

השטח הכלוא בין שני הגרפים לשני תחומים.

הראה היחס בין השטח המקווקו לשטח האפור הוא $\frac{2}{3}$.



נמצא את נק' M:

$$x^3 = \sqrt{32x} \quad /()^2$$

$$x^6 = 32x \quad \Rightarrow \quad x(x^5-32)=0$$

$$x_1 = 0 \qquad x_2 = 2$$

ערך ה-x של נק' M הוא 2

$$y(2) = 2^3 = 8$$

M(2,8), נכתוב משוואת ישר לקטע OM

$$a = \frac{8-0}{2-0} = 4$$

$$y-0 = 4(x-0) \quad \Rightarrow \quad \underline{OM} \quad y = 4x$$

חישוב השטח האפור:

$$S_{\text{אפור}} = \int_0^2 4x - x^3\,dx = \left[2x^2 - \frac{x^4}{4}\right]\Big|_0^2 = 4$$

$$S_{\text{מקווקו}} = \int_0^2 \sqrt{32x} - 4x\,dx = \left[\frac{(32x)^{1.5}}{1.5\cdot 32} - 2x^2\right]\Big|_0^2 = \frac{8}{3}$$

$$\frac{S_{\text{אפור}}}{S_{\text{מקווקו}}} = \frac{\frac{8}{3}}{4} = \frac{2}{3}$$

לכן יחס השטחים הוא $\frac{2}{3}$