204

1. $y = x^2 - 4\sin x$

$y' = 2x - 4 \cdot \cos x$

9. $y = x^2 \sin(-x)$

$y' = 2x \cdot \sin(-x) + x^2 \cdot \cos(-x) \cdot -1$

$= -2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos(-x)$

$= -2x \cdot \sin x - x^2 \cdot \cos x$

$\sin(-x) = -\sin x$

$\cos(-x) = \cos(x)$

13. $y = \sin\frac{1}{x}$

$y' = \cos\left(\frac{1}{x}\right) \cdot \frac{-1}{x^2}$

$= \frac{-1 \cdot \cos\left(\frac{1}{x}\right)}{x^2}$

23. $y = x\cos 2x$

$y' = 1 \cdot \cos 2x + x \cdot 2 \cdot -\sin(2x)$

$= \cos 2x - 2x\sin 2x$

25. $y = \cos(x^3)$

$y' = -\sin(x^3) \cdot 3x^2$

30. $y = \frac{1+\sin x}{\cos x}$

$\sin^2 x + \cos^2 x = 1$

$y' = \frac{\cos x \cdot (\cos x) - (1+\sin x)(-\sin x)}{(\cos x)^2}$

$= \frac{\cos x^2 + \sin x^2 + \sin x}{(\cos x)^2} = \frac{1 + \sin x}{(\cos x)^2}$

32. $y = 3\operatorname{tg} x - x^2$

$y' = \frac{3}{\cos^2 x} - 2x$

35. $y = \frac{1}{2}\operatorname{tg} 3x$

$y' = \frac{3}{2 \cdot \cos^2(3x)}$

228

12. $0 \le x \le 2\pi \qquad y = \cos 2x - \cos x$

$y' = -\sin 2x \cdot 2 + \sin x$

$\sin 2x = 2 \sin x \cdot \cos x$

$= -2 \cdot 2 \sin x \cdot \cos x + \sin x$

$= \sin x \left(-4\cos x + 1\right)$

$y' = 0$

$0 = \sin x (-4\cos x + 1)$

$\sin x = 0 \qquad \cos x = \frac{1}{4} \qquad \frac{\cos^{-1}\left(\frac{1}{4}\right) \cdot \pi}{180} \approx 1.318$

$x_3 = \pi k \qquad x_1 = 1.318 + 2\pi k \qquad x_2 = -1.318 + 2\pi k$

k	x_3	
-1	-	X
0	0	∨
1	π	∨
2	2π	∨
3	X	

(0, 0) min

$(\pi, 2)$ max

$(2\pi, 0)$ min

(1.318, -1.12) max

k	x_1	
-1	-	X
0	1.318	✓
1	3	X

x	x_2
-1	- X
0	- X
1	4.965 ✓
2	X

$(4.965, -1.72)$ min

	0	$\frac{\pi}{3}$	1.318	$\frac{\pi}{2}$	π	1.1π	4.965	1.9π	2π
y'	~	−	~	+	~	−	~	+	~
y	~	↓	~	↗	~	↓	~	↗	~
			min		max		min		

בין איזה ערכי x הנגזרת:

חיובית: $\pi > x > 1.318$ או $2\pi > x > 4.965$

שלילית: $4.965 > x > \pi$ או $1.318 > x > 0$

נקודות חיתוך עם הצירים

$y = \cos 2x - \cos x$

עבור $y = 0$: $0 = \cos 2x - \cos x$

עבור $x = 0$: $y = \cos 0 - \cos 0 = 0$

$(0, 0)$

$\cos 2x = 2\cos^2 x - 1$

$0 = 2\cos^2 x - 1 - \cos x$

$t = \cos x$

$0 = 2t^2 - t - 1$

$t = 1, -\frac{1}{2}$

$0 \le x \le 2\pi$

$\cos x = 1$

$x_3 = 2\pi k$

k	x_3	
-1	x	x
0	0	✓
1	2π	✓

$\cos x = -\frac{1}{2}$

$x_1 = \frac{2}{3}\pi + 2\pi k$

$x_2 = -\frac{2}{3}\pi + 2\pi k$

k	x_2	
-1	$-x$	
0	$-x$	
1	$\frac{1}{3}\pi$	✓

k	x_1	
-1	x	
0	$\frac{2}{3}\pi$	✓
1	x	

$\left(\frac{1}{3}\pi, -1\right)$

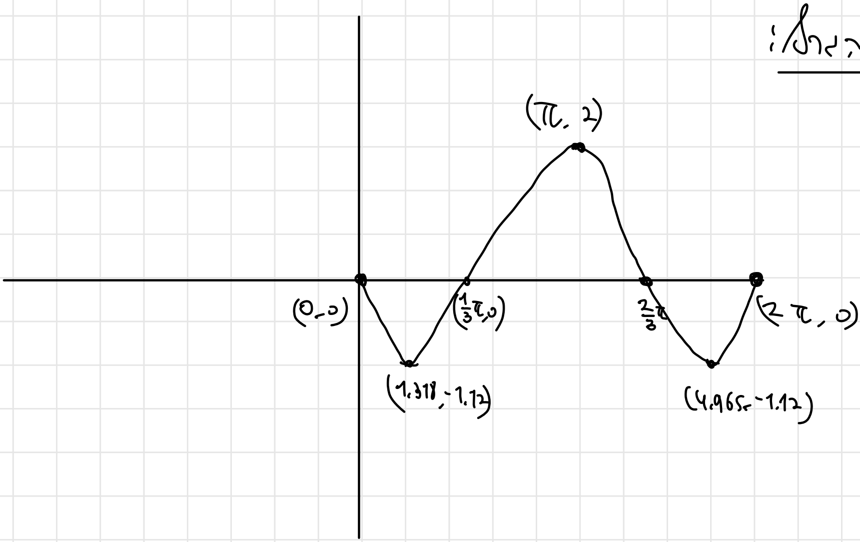
$\left(\frac{2}{3}\pi, 0\right)$

$(0, 0)$

$(2\pi, 0)$

אין חיתוך

ד. סרטטו את הגרף:



22 פברואר

.21. $f(x) = \cos 2x - 7\sin x - 4 \qquad 0 \le x \le 2\pi$

$y = 0$ חיתוך עם ציר ה-x

$0 = 1 - 2\sin^2 x - 7\sin x - 4$

$0 = -2\sin^2 x - 7\sin x - 3$

$t = \sin x \qquad = -2t^2 - 7t - 3$

$t = -\frac{1}{2}, \quad t = -3$

$\sin x = -\frac{1}{2} \qquad \sin x = -3$

אין פתרון

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$x_1 = -\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

k	x_1
-1	X
0	X
1	$\frac{11\pi}{6}$ ✓

$\left(\frac{11\pi}{6}, 0\right)$

$x_2 = \frac{7}{6}\pi + 2\pi k$

k	x_2
-1	X
0	$\frac{7}{6}\pi$ ✓
1	X

$\left(\frac{7}{6}\pi, 0\right)$

$(2\pi, -3)$

$(0, -3)$

חיתוך עם ציר ה-y

$x = 0$

$1 - 0 - 4 = -3$

ג. מצאו את הקיצון:

$f(x) = \cos 2x - 7\sin x - 4$

$f' = -\sin(2x)\cdot 2 - 7\cos x$

$= -4\sin x \cdot \cos x - 7\cos x$

$= \cos x\left(-4\cdot\sin x - 7\right)$

$f' = 0$

$\cos x = 0$ $\qquad$ $\sin x = -\frac{7}{4}$ פסול

$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$0 \le x \le 2\pi$

k	$x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
-1	x
0	$\frac{\pi}{2}$ ✓
1	x

k	$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
-1	x
0	x
1	$\frac{3\pi}{2}$ ✓

x	0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{\pi}{2}$		$\frac{3\pi}{4}$		$\frac{3\pi}{2}$		$\frac{7\pi}{4}$		2π
f'	~		$-$		~		$+$		~		$-$		~
f	~	↓		↓	min	↑		↑	max	↓		↓	~

$\min\left(2\pi - \frac{\pi}{2}\right)$

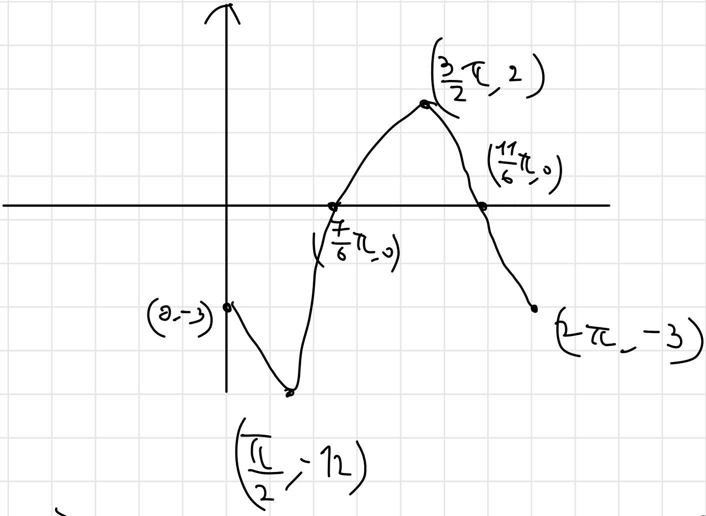
$\max\left(2, \frac{3\pi}{2}\right)$

ב. מצאו תחומי עלייה וירידה:

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ תחום ירידה:

$0 < x < \frac{\pi}{2}$ או $\frac{3\pi}{2} < x < 2\pi$ תחום עלייה:

3. <u>סקיצה:</u>



ה. נק' הקיצון של f(x) הן נקודות החיתוך ב-f'(x)

לכן $x = \frac{\pi}{2}$ $x = \frac{3\pi}{2}$

ו. כאשר f(x) גם עולה וגם מעל ציר ה-x

$$\frac{7}{6}\pi < x < \frac{3}{2}\pi$$

,25. $f(x) = 2x + a\cos x \qquad 0 \le x \le \pi$

$x = \frac{5}{6}\pi$ נתון כי בנקודה זו יש קיצון מקומי.

$f'(x) = 2 - a\sin x$

$0 = 2 - a\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)$

$\frac{2}{\sin\left(\frac{5}{6}\pi\right)} = a$

$\boxed{4 = a}$

$f'(x) = 2 - 4\sin x$ .2

$f'(x) = 0$ $\qquad 0 < x \le \pi$

$0 = 2 - 4\sin x$

$\frac{1}{2} = \sin x$

$x_1 = \frac{\pi}{6} + 2\pi k \qquad x_2 = \frac{5\pi}{6} + 2\pi k$

k	x_1
-1	X
0	$\frac{\pi}{6}$ ✓
1	X

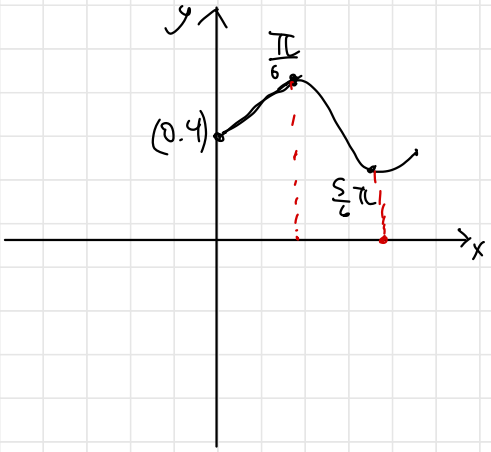
k	x_2
-1	X
0	$\frac{5\pi}{6}$ ✓
1	X

	0	$\frac{\pi}{12}$	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5}{6}\pi$	$\frac{11}{12}\pi$	π
y	~	+	~	−	~	+	~
y	~	↗	~ max	↘	~ min	↗	~

$\left(\frac{5}{6}\pi, 1.77\right)$ min

$\left(\frac{\pi}{6}, 4.57\right)$ max

$(\pi, 2.28)$ $(0, 4)$



$y = 2x + 4\cos x$

$y(0) = 0 + 4 \cdot 1 = 4$

$y(\pi) = 2\pi + 4 \cdot (-1) = 2{,}28$ .2

$g(x) = f(x) + 6$ .3

$4.511 = 6$

$1.77 = 6$

$0 < x < \frac{\pi}{6}$ .4

$\frac{5}{6}\pi < x < \pi$

204

24. $y = 3x\sin 3x + \cos 3x$

$y' = 3(\sin(3x) + x\cos 3x \cdot 3) - \sin(3x)\cdot 3$

$= 3\sin(3x) + 9x\cos 3x - 3\sin 3x$

$= 9x\cos 3x$

33. $y = x \cdot \operatorname{tg} x$

$y' = \operatorname{tg} x + \frac{x}{\cos^2 x}$

228

22. $0 \le x \le 2\pi \quad f(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$

לא. נקי מחזיר ערכי x

$y = 0$

$0 = 2\cos^2 x + \cos x - 1$

$\cos x = t \qquad 0 = 2t^2 + t - 1$

$t_{1,2} = \frac{1}{2}, -1$

$\cos x = \frac{1}{2}$ $\qquad$ $\cos x = -1$

$x_1 = +\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $\qquad$ $x_3 = +\pi + 2\pi k$

$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$ $\qquad$ $x_4 = -\pi + 2\pi k$

k	$x_1 = +\frac{\pi}{3} + 2\pi k$
-1	X
0	$\frac{\pi}{3}$ ✓
1	X

k	$x_2 = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$
-1	X
0	X
1	$\frac{5}{3}\pi$ ✓

k	$x_3 = \pi + 2\pi k$
-1	X
0	π ✓
1	X

k	$x_4 = -\pi + 2\pi k$
-1	X
0	X
1	π ✓

$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ / $(\pi, 0)$ / $\left(\frac{5}{3}\pi, 0\right)$

$f(x) = 2\cos^2 x + \cos x - 1$

$f'(x) = 4\cos x \cdot (-\sin x) - \sin x$

$= -\sin x (4\cos x - 1)$ ↓

$\sin x = 0$ $\quad x = \pi k$

$\cos x = \frac{1}{4}$

k	$x = \pi k$
-1	-
0	0 ✓
1	π ✓
2	2π ✓

$x = 1.82 + 2\pi k$

k	$x = 1.82 + 2\pi k$
-1	-4. X
0	1.82 ✓
1	X

$x = -1.82 + 2\pi k$

k	$x = -1.82 + 2\pi k$
-1	X
0	X
1	4.463 ✓

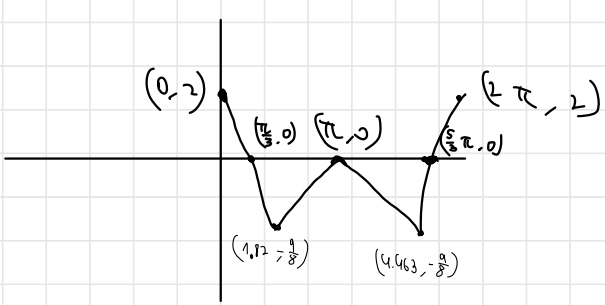
$(0, 2)$ $(\pi, 0)$

	0	$\frac{\pi}{6}$	1,82	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	4,463	$\frac{11\pi}{6}$	2π
y'		−		+		−		+	
y		↓	min	↑	max	↓	min	↑	

$(2\pi, 2)$ max

$(1{,}82 ; -\frac{9}{8})$ min

$(4{,}463, -\frac{9}{8})$ min



ד. $g(x)$ מקיימת $g'(x) = f(x)$

1. נמצא את שיעורי ה-x של נק' הקיצון בפונקציה של $g(x)$ בתחום.

נק' החיתוך של הנגזרת הן נק' קיצון של הפונקציה.

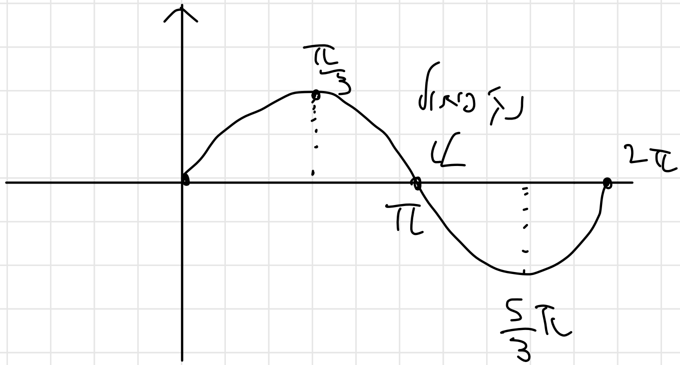
$\left(\frac{\pi}{3}, 0\right)$ max $\qquad \left(\frac{5\pi}{3}, 0\right)$

$(\pi, 0)$ אינה נק' קיצון כי אין שינוי בין תחומים לעלייה.

2. תחומי עלייה: $0 < x < \frac{\pi}{3}$, $\frac{5}{3}\pi < x < 2\pi$

ירידה: $\frac{\pi}{3} < x < \pi$, $\pi < x < \frac{5}{3}\pi$

3.



33.

$f(x) = \cos^2 x + a^2\cos x \qquad a > \sqrt{2}$

$0 \le x \le 2\pi$

א. 1. נקודות חיתוך עם ציר ה-x.

ציר x
$y = 0$

$0 = \cos^2 x + a^2\cos x$

$0 = \cos x(\cos x + a^2)$

$\cos x = 0 \qquad \cos x = -a^2$

a=>√2 בריבוע

$\cos x = -2$

cos של זה לא בטווח

$-1 < x < 1$

$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

k	$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
-1	– X
0	$\frac{\pi}{2}$ ✓
1	X

k	$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
-1	X
0	X
1	$\frac{3\pi}{2}$ ✓

$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

2. נמצא את נק' הקיצון של f(x)

$f(x) = \cos^2 x + a^2\cos x$

$f'(x) = 2\cos x \cdot -\sin x + a^2 \cdot -\sin x$

$= -\sin x(2\cos x + a^2)$

$f'(x)=0$

$0=-\sin x\,(2\cos x+a^2)$

$0=-\sin x$ ↓ $0=2\cos x+a^2$

$0=\sin x$

$\frac{-a^2}{2}=\cos x$

↓

$x=\pi k$

הפתרון נפסל שווה ו -1

$-\frac{a^2}{2}<-1$

ולכן מחוץ לתחום ההגדרה של cos

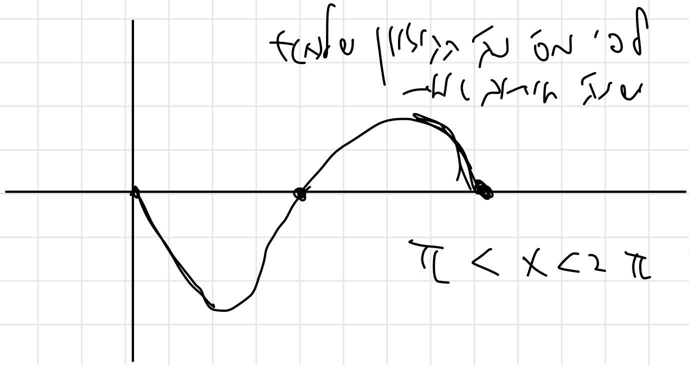
k	x	
-1	$-\pi$	✗
0	0	✓
1	π	✓
2	2π	✓
3		✗

	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	2π
y'	///	−	///	+	///
y	///	↘	///	↗	///
			min		

3. התחום שבו $f'(x)$ חיובית ו/או התחום שבו $f'(x)$

שלילי ← לפי מה שג׳ הנגזרת שלמה $f(x)$

ל$f'(x)$ שגם חיובית ולמה



חיובי: $\pi<x<2\pi$

שלילי: $0<x<\pi$