פתרונות לבני גורן
עמ' 353

7) $\int 4x\,dx = \frac{4x^2}{2} + C = 2x^2 + C$

8) $\int 9x^2\,dx = \frac{9x^3}{3} + C = 3x^3 + C$

10) $\int 5\,dx = 5x + C$

13) $\int (4x+3)\,dx = \frac{4x^2}{2} + 3x + C = 2x^2 + 3x + C$

16) $\int (x^2+5x)\,dx = \frac{x^3}{3} + \frac{5x^2}{2} + C$

19) $\int (5x^4 - 2x^3)\,dx = \frac{5x^5}{5} - \frac{2x^4}{4} + C = x^5 - \frac{x^4}{2} + C$

26) $\int (2-x)^4\,dx = \frac{(2-x)^5}{-1\cdot 5} + C = -\frac{(2-x)^5}{5} + C$

30) $\int 20\left(7-\frac{2}{3}x\right)^4 dx = 20\cdot\frac{\left(7-\frac{2}{3}x\right)^5}{-\frac{2}{3}\cdot 5} + C = \frac{20\left(7-\frac{2}{3}x\right)^5}{-\frac{10}{3}} + C = -6\left(7-\frac{2}{3}x\right)^5 + C$

356 "NY

2) $\int \left(x - \frac{2}{x^2}\right) dx = \int \left(x - 2x^{-2}\right) dx = \frac{x^2}{2} - \frac{2x^{-1}}{-1} + C$

$= \frac{x^2}{2} + \frac{2}{x} + C$

9) $\frac{-12}{(5-3x)^2} dx = -12 \cdot \int (5-3x)^{-2} dx = \frac{-12 \cdot (5-3x)^{-1}}{-1 \cdot (-3)} + C$

$= \frac{-12}{3(5-3x)} + C = \frac{-4}{5-3x} + C$

15) $\int \frac{5}{(3x-1)^6} dx = 5 \cdot \int (3x-1)^{-6} dx = \frac{5 \cdot (3x-1)^{-5}}{-5 \cdot 3} + C$

$\frac{(3x-1)^{-5}}{-3} + C = -\frac{1}{3(3x-1)^5} + C$

עמ' 358

2) $\int -\frac{3}{\sqrt{x}}\,dx = -3\int \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = -3\int \frac{1}{\sqrt{x}}\cdot\frac{2}{2}\,dx = -3\int \frac{2}{2\sqrt{x}}\,dx = -6\int \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$$(\sqrt{x})' = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$= -6\sqrt{x} + C$

11) $\int \frac{1}{4\sqrt{2x+1}}\,dx = \int \frac{2}{2}\cdot\frac{1}{4\sqrt{2x+1}}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\int \frac{2}{2\sqrt{2x+1}}\,dx = \frac{1}{4}\cdot\sqrt{2x+1} + C$

$$\left(\sqrt{f(x)}\right)' = \frac{f'(x)}{2\sqrt{f(x)}}$$

עמ' 368

7) $f'(x) = 10x(x^2-1)^4$ כ.

נשתמש בשיטת ההצבה:

$$x^2 - 1 = t$$

$$2x \cdot dx = dt$$

$$dx = \frac{dt}{2x}$$

נציב את $dx$

$\int \left(10x(x^2-1)^4\right) dx =$

$\int 10x\, t^4\, dx =$

$\int 10\cancel{x}\, t^4 \frac{dt}{2\cancel{x}} = \int 5t^4\,dt = \frac{5t^5}{5} + C = t^5 + C = (x^2-1)^5 + C$

$f(x) = (x^2-1)^5 + C$

המשך:

$$F(\sqrt{2})=2$$

$$\left[(\sqrt{2})^2-1\right]^5+C=2$$

$$1+C=2$$

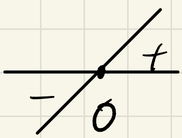
$$\boxed{C=1}$$

$$F(x)=(x^2-1)^5+1$$

ב. נעזר עם הנגזרת:

$$F'(x)=10x\boxed{(x^2-1)^4}$$

נשים לב כי החלק המודגש הוא אי שלילי ולכן הנגזרת לא משנה סימן ולכן רק המקדם $10x$ משנה סימן וגורם לשינוי במגמות העליה והירידה של $F(x)$.




כלומר: $x=0$ קיצון של הפונקציה

השינוי הוא משלילית לחיובית, כלומר $F(x)$ יורדת ואז עולה ולכן: $(0,0)$ min.

11) $f'(x) = 4x+2$

נתון:

$y = 10x - 13$ משיק לגרף הפונקציה.

נגזור, נמצא איזה ערך $x$ הישר משיק לפונקציה, יצא שיפוע 10 ולכן:

$$f'(x) = 10$$

$$4x + 2 = 10$$

$$\underline{x = 2}$$

נמצא את ערך נקודת ההשקה על ידי הצבת ערך הx בישר:

$$y = 10 \cdot 2 - 13 = 7$$

נקודת ההשקה $(2,7)$ כלומר: $f(2) = 7$

$$\int (4x+2)\,dx = \frac{4x^2}{2} + 2x + C = 2x^2 + 2x + C$$

$$f(x) = 2x^2 + 2x + C$$

$$7 = 2 \cdot 2^2 + 2 \cdot 2 + C$$

$$C = -5$$

$$f(x) = 2x^2 + 2x - 5$$

עמ' 369

15) $F''(x)=6x+a$ (פרמטר $a$)

נתון:

$(-1,1)$
$x=3$
קיצון

א.

$$\int(6x+a)\,dx=\frac{6x^2}{2}+ax+C=3x^2+ax+c$$

$$F'(x)=3x^2+ax+c$$

ידוע כי הנגזרת מתאפסת עבור $x=-1,3$, נציב ונמצא
את $a$ ו $c$:

$$3\cdot 3^2+3a+c=0$$

$$3\cdot(-1)^2-a+c=0$$

$$\begin{cases}27+3a+c=0\\ \ominus\\ 3-a+c=0\end{cases}$$

$$24+4a=0$$

$$\boxed{a=-6}$$

$$3-(-6)+c=0$$

$$\boxed{c=-9}$$

$$F'(x)=3x^2-6x-9$$

$$\int(3x^2-6x-9)\,dx=$$

$$=\frac{3x^3}{3}-\frac{6x^2}{2}-9x+c$$

$$=x^3-3x^2-9x+c$$

$$F(x)=x^3-3x^2-9x+c$$

ידוע כי: $F(-1)=1$

$$1=(-1)^3-3(-1)^2-9\cdot(-1)+c$$

$$c=-4$$

$$F(x)=x^3-3x^2-9x-4$$

עמ' 377

נתון:

32) $f'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+a}}$

$y=2x+8$ משיק בנקודה $y=2$

כך, שנציב את ערך ה$x$:

$$2 = 2x+8$$

$$2x = -6$$

$$x = -3$$

נק' ההשקה: $(-3,2)$

השיפוע יהיה 2 $f'(-3)=2$

$$2 = \frac{2}{\sqrt{-3+a}}$$

$$\boxed{a=4}$$

$$\int \frac{2}{\sqrt{x+4}} \cdot \frac{2}{2} dx = 4 \int \frac{1}{2\sqrt{x+4}} dx = 4\sqrt{x+4} + c$$

$$f(x) = 4\sqrt{x+4} + c$$

$$f(-3) = 2$$

$$2 = 4\sqrt{-3+4} + c \Rightarrow c = -2$$

$$f(x) = 4\sqrt{x+4} - 2$$

ב. המשיקים עוברים דרך $(1,7)$

$$F'(x) = \frac{2}{\sqrt{x+4}}$$

נביע נקודה כללית הנמצאת על $f(x)$ באמצעות $t$:

$$F(t) = 4\sqrt{t+4} - 2$$

$$\left(t,\ 4\sqrt{t+4} - 2\right)$$

אנו יודעים כי $x=t$ הוא נקודת ההשקה ולכן נחשב את ערך השיפוע בנקודה לפי הנגזרת:

$$F'(t) = \frac{2}{\sqrt{t+4}} = \text{שיפוע המשיקים}$$

בנוסף ניתן לחשב את השיפועים עם 2 נקודות כאלו:

$$(1,7)\ ,\ \left(t,\ 4\sqrt{t+4} - 2\right)$$

$$\text{שיפוע המשיקים} = \frac{4\sqrt{t+4} - 2 - 7}{t-1} = \frac{4\sqrt{t+4} - 9}{t-1}$$

נשווה:

$$\overset{\sqrt{t+4}}{\frac{4\sqrt{t+4} - 9}{t-1}} = \overset{t-1}{\frac{2}{\sqrt{t+4}}} \quad / \cdot (t-1)\sqrt{t+4}$$

$$4(t+4)-9\sqrt{t+4}=2(t-1)$$

$$4t+16-9\sqrt{t+4}=2t-2$$

$$-9\sqrt{t+4}=-2t-18 \quad /()^2$$

$$81(t+4)=4t^2+72t+324$$

$$81t+324=4t^2+72t+324$$

$$4t^2-9t=0$$

$$t(4t-9)=0$$

$$t=0 \qquad t=\frac{9}{4}$$

שתי התוצאות שקיבלנו מייצגות את 2 נקודות ההשקה השונות.

$$f'(t)=\frac{2}{\sqrt{t+4}}$$

$$f'(0)=1 \Rightarrow \text{I)}\ \begin{array}{c} m=1 \\ (1,7) \end{array} \qquad y-7=1(x-1)$$

$$\boxed{y=x+6}$$

$$f'\left(\frac{9}{4}\right)=\frac{4}{5} \qquad \text{II)}\ \begin{array}{c} m=\frac{4}{5} \\ (1,7) \end{array} \qquad y-7=\frac{4}{5}(x-1)$$

$$\boxed{y=\frac{4}{5}x+\frac{31}{5}}$$