שאלון בית ב-2 מגיזון | שאלון 5

עמ' 5 10

$x^2+2ax+a^2$

a. $f(x)=\dfrac{(x+a)^2}{x^2+3}$ יש קיצון ב- $x=-\frac{1}{2}$

א. נמצא את הפרמטר a

פתרון: נגזור, נשווה ל-0 ונציב $x=-\frac{1}{2}$

$$f'(x)=\frac{2(x+a)(x^2+3)-2x(x+a)^2}{(x^2+3)^2}$$

$$=\frac{2(x+a)[x^2+3-x^2-ax]}{(x^2+3)^2}$$

$$0=2(x+a)[3-ax]$$

$x=-a$

$\frac{1}{2}=a$

$0=3-ax$

$x=\frac{3}{a}$

$-6=a$

ב. 1. $a=-6$

$$y=\frac{(x-6)^2}{x^2+3}$$

נק' חיתוך עם הצירים

y	x
$x=0$	$y=0$
$y=\frac{36}{3}=12$	$0=(x-6)^2$
	$6=x$
$(0,12)$	$(6,0)$

2. נק' קיצון:

$$y' = \frac{2(x-6)(x^2+3)-(x-6)^2\cdot 2x}{(x^2+3)^2}$$

$$= \frac{2(x-6)\left[\cancel{x^2}+3-\cancel{x^2}+6x\right]}{(x^2+3)^2} = 2(x-6)\cdot 3\cdot(1+2x)$$

$$0=2(x-6)[6x+3]$$

$\boxed{6=x}$

$0=6x+3$

$6x=-3$

$\boxed{x=-\frac{1}{2}}$

$(6,0)$ min

$(-\frac{1}{2},13)$ max

	-1	$-\frac{1}{2}$	0	6	7
y'	$+$		$-$		$+$
y	↗		↘		↗

3. עליה: $x<-\frac{1}{2}$, $6<x$

ירידה: $-\frac{1}{2}<x<6$

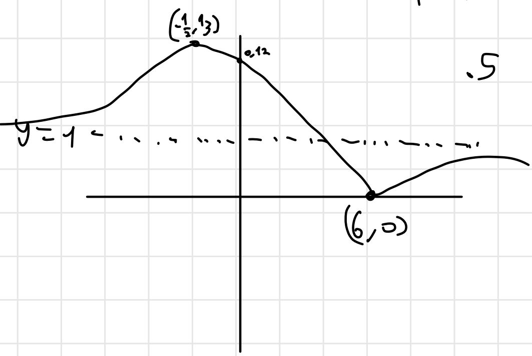
4. אסי' מקבילות:

אנכית: $\boxed{\text{אין}}$ ת.ה כל x

אופקית: $\lim\limits_{x\to\infty} \frac{x^2-12x+36}{x^2+3} = \frac{\infty^2}{\infty^2} = 1$

$\boxed{y=1}$

5.



ו. $g(x) = -f(x)$

$y_g = -y_f$

(1) כל ערך y של f הופך ל-שלילי

(2) העליה והירידה שם הפוכים.

$(-\frac{1}{2},-13)$, $(6,0)$

min max

אסי' מקבילה אופקית:

$y=-1$

עליה: $-\frac{1}{2}<x<6$

וירידה: $x<-\frac{1}{2}$, $x>6$

10. $f(x)=\frac{a}{x^2-4}$

ג) בנק' $x=-3$
$f'(x)=6$
שיפוע

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-4)-a\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$6=\frac{6a}{(9-4)^2}$$

$$6\cdot 25=6a$$

$$25=a$$

$$f(x)=\frac{25}{x^2-4}$$

$$f'(x)=\frac{-50x}{(x^2-4)^2}$$

	-3	-2	-1	0	1	2	3
y'	+		+		−		−
y	↗		↗		↘		↘
				max			

1. תח': $x\neq\pm2$

2. נק' חיתוך עם הצירים

ציר x: $y=0$ — אין נק' חיתוך

ציר y: $x=0$

$y=\frac{25}{-4}$

$\left(0,\ \frac{25}{-4}\right)$

3. נק' קיצון:

$f'(x)=0$

$0=-50x$

$0=x$

$\left(0,\ \frac{25}{-4}\right)$ max

-6.25

4. תחומי עליה וירידה:

עליה: $x<-2$, $-2<x<0$

ירידה: $0<x<2$, $2<x$

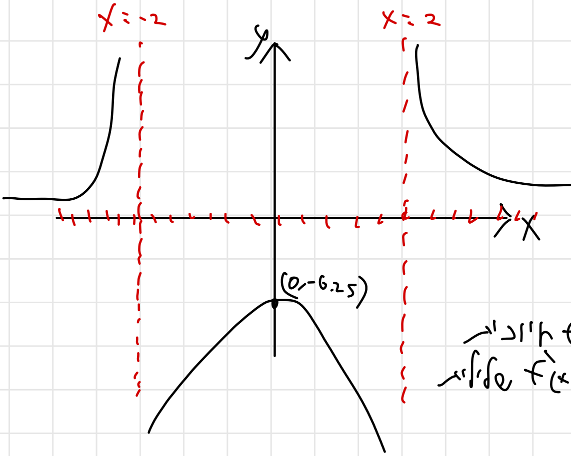
5. אסימפטוטות:

אנכיות: $x=-2$, $x=2$ לפי תח'.

אופקיות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{25}{x^2-4}=\frac{25}{\infty^2}=\frac{1}{\infty^2}=0$$

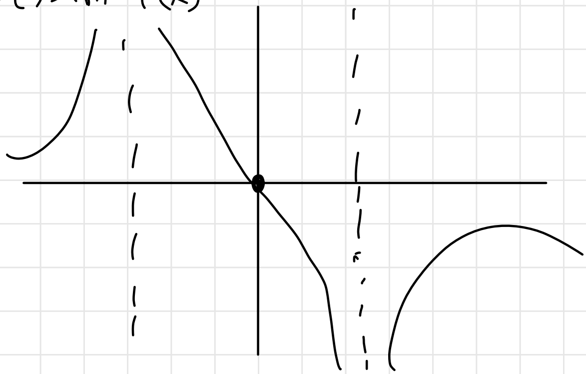
ג. גרף



y = 0

ד. $\frac{\text{גרף } f'(x)}{}$

תשובה לשים לב שכאשר $f(x)$ עולה $f'(x)$ חיובית
$f(x)$ יורדת $f'(x)$ שלילית



.13, $f(x)=\dfrac{x+a}{6x-x^2}$

קיים ← נק' קיצון ב- $x=1$:

$f(1)=0$

$$f'(x)=\frac{1\cdot(3x-x^2)-(x+a)(-2x+3)}{(3x-x^2)^2}$$

$$=\frac{\cancel{3x}-x^2+2x^2-\cancel{3x}+2xa-3a}{(3x-x^2)^2}$$

$$=\frac{x^2+2xa-3a}{(3x-x^2)^2}$$

$$0=1+2a-3a$$

$$-1=-a$$

$$1=a$$

ב. אסימפטוטה: לפונקציה 3

$x=3$

ת"ה: אסי' אנכי ← $0=x(b-x)$

$x=0$

$x=b=3$

$\boxed{b=3}$

$f(x)=\dfrac{x+a}{3x-x^2}$

נמצא את נק' הקיצון:

$f(x)=\dfrac{x+1}{3x-x^2}$

$f'(x)=\dfrac{x^2+2x-3}{(3x-x^2)^2}$

$0=x^2+2x-3$

$x_{1,2}=1,-3$

	-4	-3	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	3	4
y'	$+$		$-$		$-$		$+$		$+$
y	↗		↘		↘		↗		↗

$\left(-3,\frac{1}{9}\right)$ max

$(1,1)$ min

ה. אסימפטוטות אנכיות: $x=0$ $x=3$ לפי ת"ה

אופקיות: $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{3x-x^2} = \frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$

$y=0$

ו. נק' חיתוך עם הצירים:

x: $y=0$

$0 = x+1$

$-1 = x$

$(-1,0)$

y: $x=0$ נפסל בגלל ת"ה

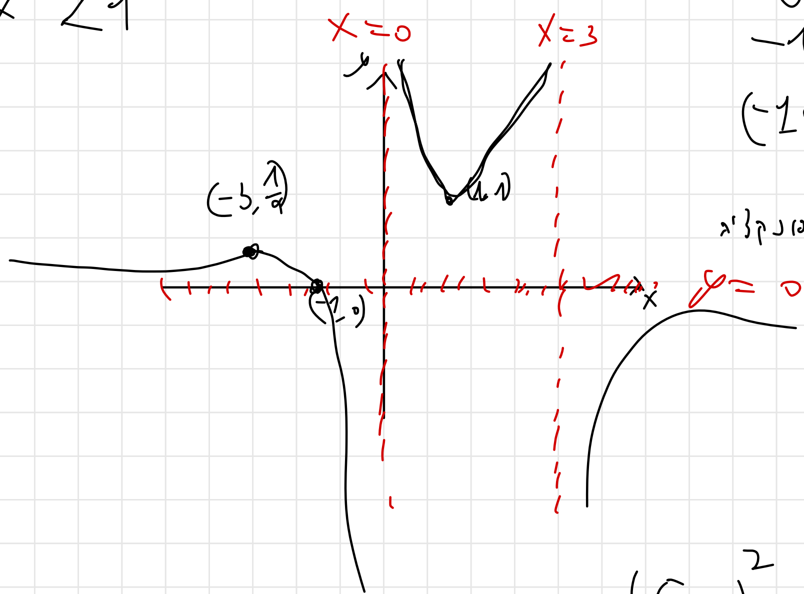
עלייה: $x<-3$, $1<x<3$

$3<x$

ירידה: $-3<x<0$

$0<x<1$

ז. גרף הפונקציה



ח. $(f(x))^2 = g(x)$

$(y_f)^2 = y_g$ המשמעות היא לקחת את כל ערכי ה-y ולהעלות אותם בריבוע. $(-3, \frac{1}{81})$, $(1,1)$, $(-1,0)$

18. $y = \dfrac{x^3+a}{x^2}$

נגזרת המנה ציוה.

$y' = \dfrac{3x^2 \cdot x^2 - (x^3+a)(2x)}{x^4}$

$y' = \dfrac{3x^4 - 2x^4 - 2ax}{x^4}$

$y' = \dfrac{x^4 - 2ax}{x^4}$

$y(-1) = -1+a$

הישר המשיק לפונקציה

$y - y_1 = m(x - x_1)$

$y - 12 = m(x - 0)$

$y = mx + 12$

$x = -1 \qquad y = -1+a$

$m = \dfrac{x^4 - 2ax}{x^4}$

$y = \dfrac{x^4 - 2ax}{x^4} \cdot x + 12$

$-1 + a = \dfrac{1 - 2a\cdot(-1)}{1} \cdot (-1) + 12$

$-1 + a = -1 - 2a + 12$

$3a = 12$

$\boxed{a = 4}$

ב. <u>תחום:</u> $x \neq 0$

חיתוך <u>ציר x</u> $y=0$

$0 = \dfrac{x^3+4}{x^2}$

$-4 = x^3$

$-1.587 = x$

$(\sqrt[3]{-4}, 0)$

ג- נק הקיצון של הפונקציה:

$$y = \frac{x^3+4}{x^2}$$

$$y' = \frac{x^4-2ax}{x^4} \qquad y' = \frac{x^4-8x}{x^4}$$

$$y' = 0$$

$$0 = x^4 - 8x$$

$$0 = x(x^3-8)$$

נפסל בגלל ת"ה $\cancel{\boxed{0 = x}}$ ✓

$$8 = x^3$$

$$\boxed{2 = x}$$

$\cancel{(0,\ )}$ נפסל

$(2,3)$

$$y_{(2)} = \frac{8+4}{4} =$$

עזר

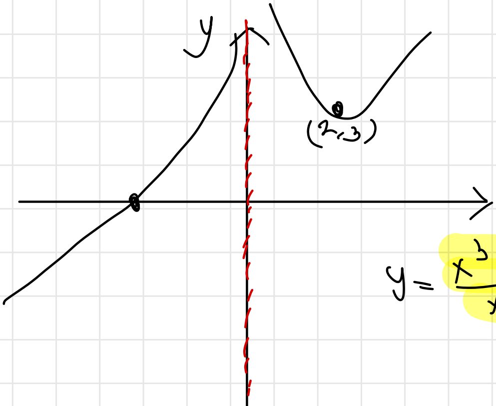
	-1	0	1	2	3
y'	$+$		$-$		$+$
y	↗		↘		↗
				min	

3. אס' מאונכות ואופקיות:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^3+4}{x^2} = \frac{\infty^3}{\infty^2} = \infty$$

אין אס' אופקית

ה.



$$y = \frac{x^3+4}{x^2}$$

ו. $x>0$ אי השוויון $x^3-3x^2+4 \ge 0$

$$x^3+4 \ge 3x^2 \quad /: x^2$$

$$\frac{x^3+4}{x^2} \ge 3$$

$$y \ge 3$$

* נסתכל על הגרף של הפונקציה ונראה שמנק הקיצון שערך ה-y שלה הוא 3 כל ערכי ה-x חיוביים.

עמ' 155

.2

$$f_{(x)} = \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-8}$$

א. ת"ה:

שורש מונה:

$x \geq 0$

שורש מכנה:

$x \geq 0$

מכנה:

$x\sqrt{x} - 8 \neq 0$

$4\sqrt{4} - 8 = 0$

$x \neq 4$

ת"ה: $x \geq 0 , x \neq 4$

ב. נק' חיתוך עם הצירים:

ציר y

$x = 0$

$(0,0)$

ציר x

$y = 0$

$0 = x$

$(0,0)$

ג. אסימפטוטות מקבילות לצירים

אנכית: $x = 4$ לפי ת"ה

אופקית

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{x\sqrt{x}-8} \to \frac{\cancel{\sqrt{\infty}}}{\infty\cancel{\sqrt{\infty}}} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y = 0$

$$y' = \frac{\frac{(x\sqrt{x}-8)}{2\sqrt{x}} - \sqrt{x}\cdot\frac{3x}{2\sqrt{x}}}{(x\sqrt{x}-8)^2}$$

$$y' = \frac{-2x\sqrt{x}-8}{(x\sqrt{x}-8)^2 \cdot 2\sqrt{x}}$$

ד. נק' קיצון

$$(x\sqrt{x})' = 1\cdot\sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{3x}{2\sqrt{x}}$$

$$y' = \frac{-2(x\sqrt{x}+4)}{(x\sqrt{x}-8)^2}$$

$y'=0$ $\quad 0 = x\sqrt{x}+4$

$\sqrt[3]{16} = x$

נפסל מתחום הה״ג.

$0\le x$ $\quad$ אס׳

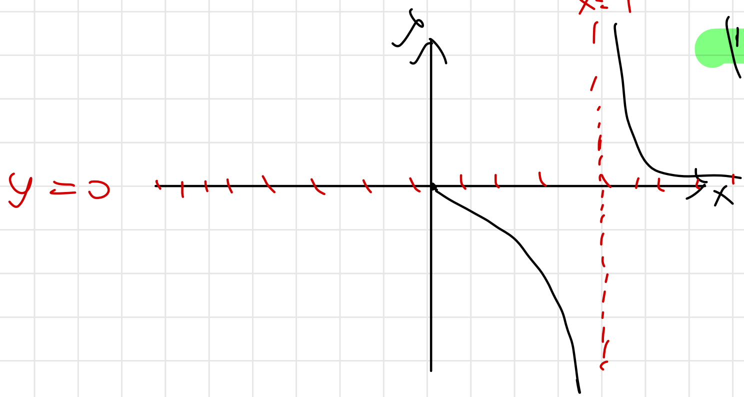
x	−1	0	1	4	5
y'			−		−
y			↘		↘

קיצון | נקודה $(0,0)$

ה. ירידה: $0<x<4$, $4<x$

עליה: אין

ו.



ט. התחום שבו $f(x)<0$

$f'(x)<0$

התחום שבו הפונקציה שואפת לציר ה-x עבו גם התחום

שבו $f'(x)$ שלילית – בתחום $0<x<4$ $f(x)$ בירידה,

ושלילית – וגם כאשר $f(x)$ יורדת – $f'(x)$ שלילית.

שיעורי בית — אינטגרלים

עמ'
.102

1. $$f(x)=\frac{x^2+5}{x^2+x+3}$$

א. תח"ה: $x^2+x+3\neq 0$

אין פתרון

$\Downarrow$

תח"ה כל x

ב. נק' חיתוך עם הצירים:

$\underline{y}$

$x=0$

$$y=\frac{0+5}{0+0+3}=\frac{5}{3}$$

$\left(0,\frac{5}{3}\right)$

$\underline{x}$

$0=x^2+5$

$-5=x^2$

אין פתרון

אין חיתוך עם ציר ה-x.

ג. נק' קיצון:

$$y'=\frac{2x(x^2+x+3)-(x^2+5)(2x+1)}{(x^2+x+3)^2}$$

$$=\frac{\cancel{2x^3}+2x^2+6x-\cancel{2x^3}-x^2-10x-5}{(x^2+x+3)^2}$$

$$=\frac{x^2-4x-5}{(x^2+x+3)^2}$$

$y'=0$

$0=x^2-4x-5$

$x_1=5 \qquad x_2=-1$

	-2	-1	0	5	6
y'	+		−		+
y	↗		↘		↗
		max		min	

$\left(5, \frac{10}{11}\right)$ min

$(-1, 2)$ max

$$f(x) = \frac{x^2+5}{x^2+x+3}$$

$$f(5) = \frac{30}{33}$$

$$f(-1) = \frac{6}{3} = 2$$

3. עולה: $5<x$, $x<-1$

יורדת: $-1<x<5$

ה. אסי' אנכית: אין

אופקית: $y=1$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+5}{x^2+x+3} \to \frac{\infty^2}{\infty^2} = 1$$

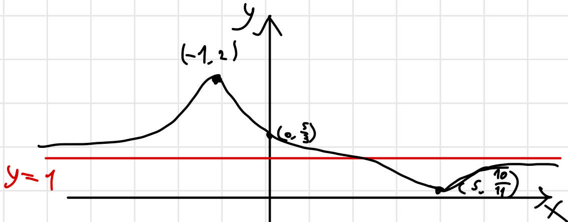
ו. מצאו את שיעורי את החיתוך של הפונקציה עם האסימפטוטה האופקית.

$$y=1$$

$$1 = \frac{x^2+5}{x^2+x+3}$$

$$\cancel{x^2}+x+3 = \cancel{x^2}+5$$

$$x=2$$



ט. סקיצה

① ח. $g(x) = bf(x) - 3$

$b>0$

5. $g(x)$ מינימום

2. $f(x)$ מינימום

② $g(x) = 4 \cdot \frac{10}{11} - 3$

$$g(x) = \frac{7}{11}$$

$$5 = b2 - 3$$

$$8 = 2b$$

$$b = 6$$

10. $f(x)=\frac{a}{x^2-4}$

ג) בנק' $x=3$

$f'(3)=6$

שיפוע

$$f'(x)=\frac{0\cdot(x^2-4)-a\cdot 2x}{(x^2-4)^2}$$

$$6=\frac{6a}{(9-4)^2}$$

$$6\cdot 25=6a$$

$$25=a$$

$$f(x)=\frac{25}{x^2-4}$$

$$f'(x)=\frac{-50x}{(x^2-4)^2}$$

	-3	-2	-1	0	1	2	3
y'	$+$		$+$		$-$		$-$
y	↗		↗	max	↘		↘

1. תח' הג': $x\neq\pm 2$

2. נק' חיתוך עם הצירים

ציר x	ציר y
$y=0$	$x=0$
אין נק' חיתוך	$y=\frac{25}{-4}$
	$\left(0,\frac{25}{-4}\right)$

3. נק' קיצון:

$f'(x)=0$

$0=-50x$

$0=x$

$\left(0,\frac{25}{-4}\right)$ max

-6.25

4. תחומי עליה וירידה:

עליה: $x<-2$, $-2<x<0$

ירידה: $0<x<2$, $2<x$

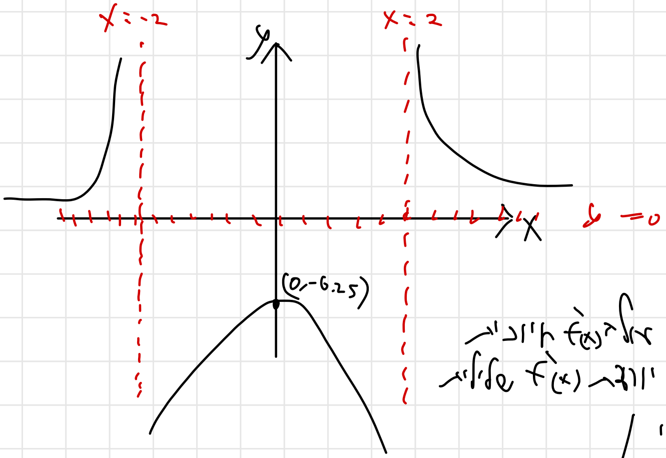
5. אסימפטוטות:

אנכיות: $x=-2$ $x=2$ לפי ת"ה.

אופקיות:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{25}{x^2-4}=\frac{25}{\infty^2}=\frac{1}{\infty^2}=0$$

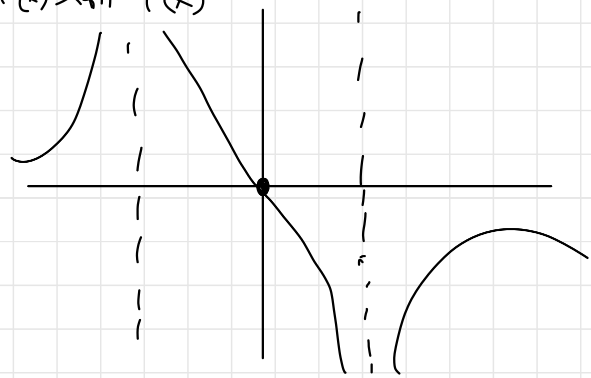
ט. גרף



י. גרף $f'(x)$

חשוב לשים לב שכאשר $f(x)$ עלה $f'(x)$ חיובי

$f(x)$ יורדת $f'(x)$ שלילי



23. $y = \frac{x+2a}{x^2}$

נתון: $a>0$

א. תחום: $x \neq 0$

ב. נק' חיתוך עם הצירים

ציר x:

$y=0$

$0 = x+2a$

$-2a = x$

$(-2a, 0)$

ציר y:

$x=0$

אין נק' חיתוך

ג. אסימפטוטות מאונכות לצירים.

אנכית: $x=0$ לפי תחום

אופקית:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x+2a}{x^2} \to \frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y=0$

ד. נק' קיצון

$$y' = \frac{1x^2 - (x+2a)(2x)}{x^4}$$

$$= \frac{x^2 - 2x^2 - 4ax}{x^4}$$

$$= \boxed{\frac{-x^2-4ax}{x^4}}$$

$y' = 0$

$0 = x(-x-4a)$

$0 = x \leftarrow$ נפסל

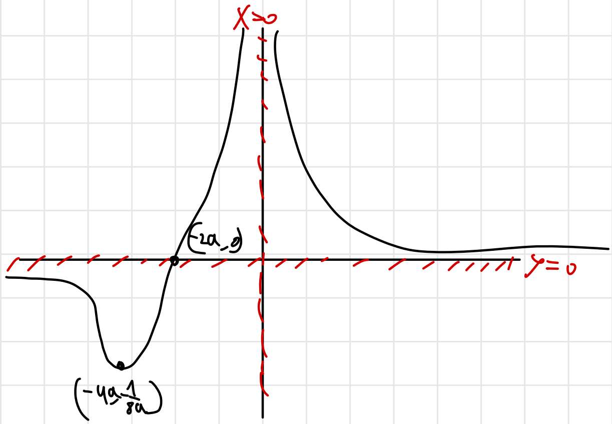
$-4a = x$

$$y(-4a) = \frac{-2a}{16a^2} = -\frac{1}{8a}$$

$$\left(-4a, -\frac{1}{8a}\right)$$

	$-5a$	$-4a$	$-2a$	0	1
y'	$-$		$+$		$-$
y	↘		↗		↘
		min			

ה.



ו. עליה: $0 < x < -4a$

ירידה: $x < 0$ או $x > -4a$

25. $a>2$, $y = \dfrac{x-2}{x^2-a^2}$

א. ת"ה:

$(x+a)(x-a) \neq 0$

$x \neq \pm a$

ב. אסימפטוטות: אנכיות:

$x=a$, $x=-a$ לפי ת"ה

אופקית:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x-2}{x^2-a^2} = \frac{\infty}{\infty^2} = \frac{1}{\infty} = 0$$

$y=0$

ג. נק' חיתוך עם הצירים:

ציר x

$y=0$

$0 = x-2$

$2 = x$

$(2,0)$

ציר y

$x=0$

$\dfrac{-2}{-a^2}$

$\left(0, \dfrac{-2}{-a^2}\right)$

ד. תחומי עליה וירידה:

$$f'(x) = \frac{1\cdot(x^2-a^2)-(x-2)(2x)}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= \frac{x^2-a^2-2x^2+4x}{(x^2-a^2)^2}$$

$$= \frac{-x^2+4x-a^2}{(x^2-a^2)^2}$$

$y'=0$

$0=-x^2+4x-a^2$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16-4\cdot-1\cdot-a^2}}{-2}$$

$$\frac{-4 \pm \sqrt{16-4a^2}}{-2}$$

$a>2$ לכן יוצא $(-)$ מינוס

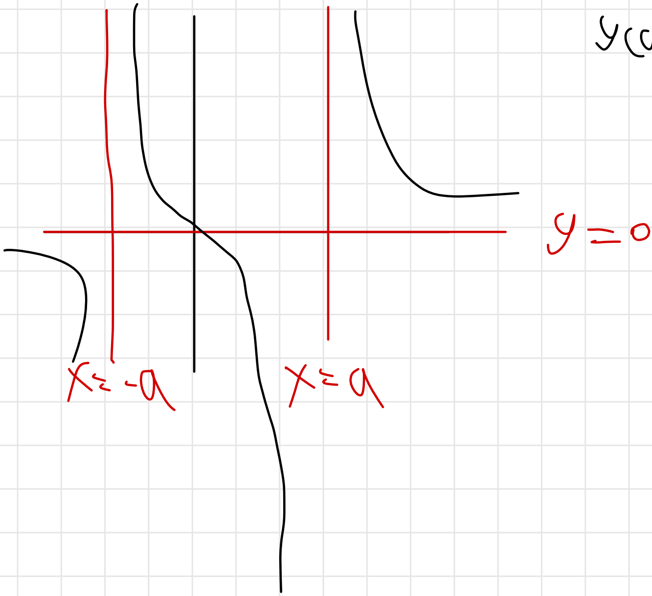
תמיד ואין פתרון למשוואה.

	$-a-1$	$-a$	0	a	$a+1$
y'	$-$		$-$		$-$
y	↘		↘		↘

$y_{(-a-1)} = -(-a-1)^2+4(-a-1)-a^2$

$a^2+2a-1-4a-4-a^2$

$= \dfrac{-2a-5}{+} = \dfrac{-}{+}$



$$y(a+1) = \frac{-(a+1)^2 + 4(a-1) - a^2}{+} = \frac{-}{+}$$

28. $b>0$, $f(x)=\frac{(x-3b)^2}{(x-b)^4}$

א. תחום:

$x-b\neq 0$

$x\neq b$

ב. אסימפטוטה אנכית: $x=b$

אופקית:

$\lim_{x\to\infty}\frac{(x-3b)^2}{(x-b)^4}=\frac{\infty^2}{\infty^4}=\frac{1}{\infty^2}=0$

$y=0$

ג. נק' חיתוך ציר x

$y=0$

$0=(x-3b)^2$

$3b=x$

$(3b,0)$

נק' חיתוך ציר y

$x=0$

$y=\frac{(-3b)^2}{(-b)^4}$

$y=\frac{9}{b^2}$

$\left(0,\frac{9}{b^2}\right)$

ד.

$$f'(x)=\frac{2(x-3b)\cdot 1(x-b)^4-(x-3b)^2\cdot 4(x-b)^3\cdot 1}{(x-b)^{16}}$$

$$=\frac{2(x-3b)(x-b)^3[x-b-2(x-3b)]}{(x-b)^{16}}$$

$$=\frac{2(x-3b)(x-b)^3(-x+5b)}{(x-b)^{16}}$$

$y'=0$ $\quad 0=(x-3b)(x-b)^3(-x+5b)$

$x = 3b$ $\quad (3b, 0)$ min

נפסל בגלל תחום הגדרה. ~~$x = b$~~

$x = 5b$ $\quad \left(5b, \frac{1}{64b^2}\right)$ max

ה.

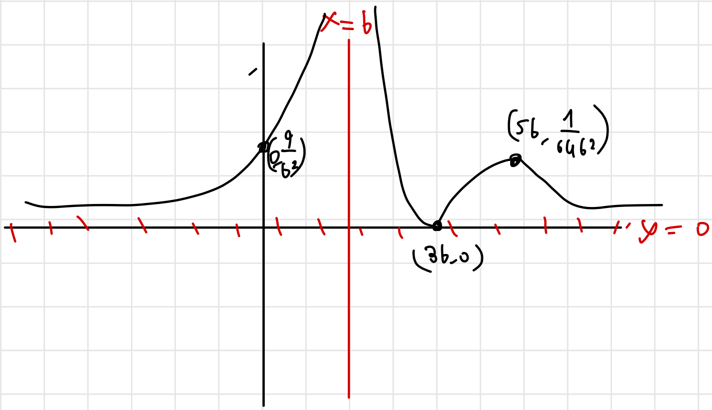
$$f(x) = \frac{(x-3b)^2}{(x-b)^4} \qquad f(5b) = \frac{(2b)^2}{(4b)^4} = \frac{1}{64b^2}$$

	0	b (ל״מ)	2b	3b	4b	5b	6b
f'	+		−		+		−
f	↗		↘	min	↗	max	↘

$$f'(x) = \frac{2(x-3b)(x-b)^3(-x+5b)}{(x-b)^{16}} =$$

$$f(0) = (-)(-)(+) \qquad f(4b) = (+)(+)(+)$$

$$f(2b) = (-)(+)(+) \qquad f(6b) = (+)(+)(-)$$



ו.

עמ' 158

13. $y=\dfrac{x+4a}{\sqrt{x+a}}$ $\quad a>0$

א. ת"ה: שורש $x+a\geq 0$

$x\geq -a$

מכנה

$\sqrt{x+a}\neq 0$ ולכן

$x+a\neq 0$

$x\neq -a$

$\boxed{\text{ת"ה סופי } x>a}$

ב. נק' חיתוך עם הצירים

ציר x

$y=0$

$0=x+4a$

$-4a=x$

~~$(-4a,0)$~~

נפסל בגלל תחום הגדרה

ציר y

$x=0$

$(0,4\sqrt{a})$

ג. אסימפטוטות:

אנכית: $x=-a$

אופקית:

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x+4a}{\sqrt{x+a}}\to\frac{\infty}{\sqrt{\infty}}=\sqrt{\infty}$$

אין אופקית

ד.

$$y'=\frac{\sqrt{x+a}-(x+4a)\frac{1}{2\sqrt{x+a}}}{(\sqrt{x+a})^2}$$

$$=\frac{2(x+a)-(x+4a)}{(\sqrt{x+a})^2\cdot 2\cdot\sqrt{x+a}}$$

$$=\frac{x-2a}{(\sqrt{x+a})^2\cdot 2\sqrt{x+a}}$$

$y'=0$

$0=x-2a$

$2a=x$

$y(2a)=\dfrac{6a}{\sqrt{3a}}$

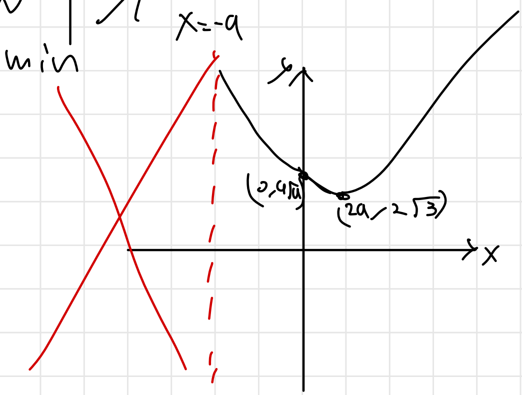
$(2a,2\sqrt{3a})$ min

	$-a$	0	$2a$	$3a$
f'		$-$		$+$
f		↘		↗

ה. עליה: $2a<x$

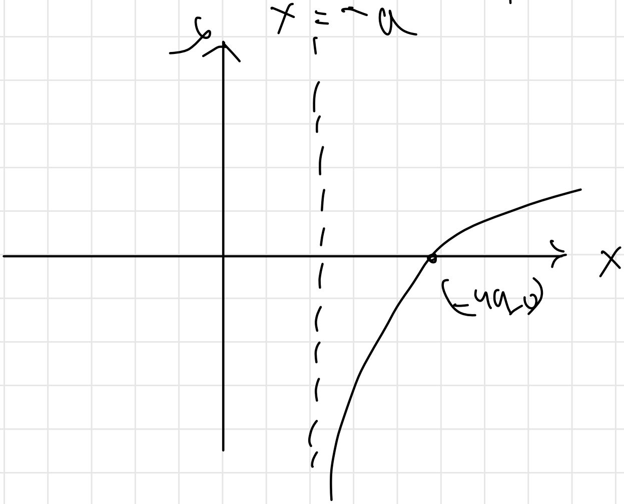
ירידה: $-a<x<2a$

ו.



ט. f $a<0$

מכיוון ש- a שלילי כל ערכי ה-x הפכו להפכים ביניהם - האסימפטוטה האנכית $x=-a$ היא מס' חיובי ומכאן שתחום ההגדרה $-a<x$ פוסל את נק' הקיצון $x=2a$ ואומר והיא לא בתחום ההגדרה.



ז+ח.