עמוד 117

8. $y = \sqrt{16 - 2x}$

פתרון:

תנאי הגדרה: $16 - 2x \geq 0$

$16 \geq 2x$

$x \leq 8$

10. $y = \sqrt{9 - x^2}$

פתרון:

תנאי הגדרה: $9 - x^2 \geq 0$

$-3 \leq x \leq 3$

13. $y = \frac{1}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$

פתרון:

תנאי הגדרה:

$x^2 + x + 1 \geq 0$

שורשי הפרבולה:

$x^2 + x + 1 = 0$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{1 - 4}}{2}$

תנאי מכפיל: x יכול להיות כל מספר ממשי פרט ל-0 וכל ביטוי שבמכנה חייב להיות גדול מ-0.

16. $y = \frac{x}{\sqrt{x+2}-1}$

תנאי:

תחום הגדרה:

$x+2 \geq 0$

$x \geq -2$

$\sqrt{x+2}-1 \neq 0$:תנאי נוסף

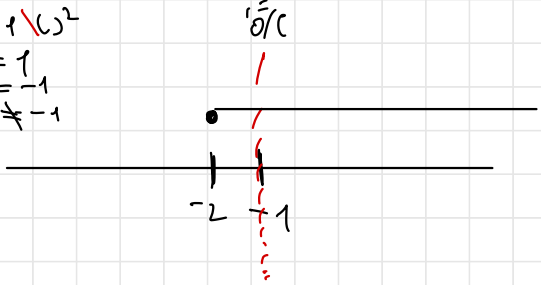
$\sqrt{x+2}-1=0$

$\sqrt{x+2}=1 \quad /()^2$

$x+2=1$

$x=-1$

$x \neq -1$



תנאי סופי:

$-2 \leq x < -1$

$x > -1$

21. $y = \sqrt{x^3 - 4x}$

תנאי:

תחום הגדרה:

$x^3 - 4x \geq 0$:תנאי נוסף

$x(x^2-4)=0$

$x=0$

$x^2-4=0$

$x^2=4$

$x=\pm 2$

$-2 < x < 0$

$2 < x$

124.

6. $y = x\sqrt{x}$

$$y' = 1\cdot\sqrt{x} + x\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} = \sqrt{x} + \frac{x}{2\sqrt{x}} = \frac{2x+x}{2\sqrt{x}}$$

$$= \frac{3x}{2\sqrt{x}} = \frac{3\sqrt{x}}{2}$$

8. $y = \dfrac{x-1}{\sqrt{x}}$

$$y' = \frac{1\cdot\sqrt{x} - (x-1)\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2} = \frac{\frac{2x-x+1}{2\sqrt{x}}}{\frac{(\sqrt{x})^2}{1}} = \boxed{\frac{x+1}{2\sqrt{x}(\sqrt{x})^2}}$$

$x+1$

20. $y = \sqrt{x^4 - 2x}$

$$y' = \frac{4x^3-2}{2\sqrt{x^4-2x}} = \frac{2(2x^3-1)}{2\sqrt{x^4-2x}} = \frac{2x^3-1}{\sqrt{x^4-2x}}$$

23. $y = \dfrac{1}{\sqrt{2x-1}}$

$$y' = \frac{0\cdot\sqrt{2x-1} - 1\cdot\frac{2}{\sqrt{2x-1}}}{(\sqrt{2x-1})^2} = \frac{\frac{-1}{\sqrt{2x-1}}}{(\sqrt{2x-1})^2} = \boxed{\frac{-1}{\sqrt{2x-1}(\sqrt{2x-1})^2}}$$

25. $y = x\sqrt{2x-x^2}$

$$y' = 1\cdot\sqrt{2x-x^2} + x\cdot\frac{-2x+2}{2\sqrt{2x-x^2}} = \frac{2x-x^2+x(-x+1)}{\sqrt{2x-x^2}}$$

$-x+1$ $\quad -x^2+x$

$$= \boxed{\frac{-2x^2+3x}{\sqrt{2x-x^2}}}$$

27.

$$y = \frac{x-2}{\sqrt{x^2-4}}$$

$$y' = \frac{1\cdot\sqrt{x^2-4} - (x-2)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2-4}}}{(\sqrt{x^2-4})^2} = \frac{\frac{x^2-4-x^2+2x}{\sqrt{x^2-4}}}{(\sqrt{x^2-4})^2} = \frac{\frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4}}}{(\sqrt{x^2-4})^2} = \frac{2x-4}{\sqrt{x^2-4}\,(\sqrt{x^2-4})^2}$$

תרגיל 7

5. $y = 2\sqrt{x} - x$

א. תנאי: $x \geq 0$

ב. נקודות קיצון:

$$y' = 2\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}} - 1$$

$$= \frac{2-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}}$$

$y' = 0$

$$\frac{2-2\sqrt{x}}{2\sqrt{x}} = 0$$

$$\sqrt{x} - 1 = 0$$

$x = 1$ נקודת קיצון

$x = 0$ נקודת קיצון

x	0		$\frac{1}{2}$		1		2
y'		+		+		−	
y		↗		↗	max	↘	

$\frac{1}{\sqrt{\frac{1}{2}}} - 1 = +$

$\frac{1}{\sqrt{2}} - 1 = -$

נקודת קיצון

$(0, 0)$ מינימום

$(1, 1)$ מקסימום

ב. נקודות חיתוך:

חיתוך עם ציר ה-X:

$y = 0$

$x - 2\sqrt{x} = 0$

$\sqrt{x}(\sqrt{x} - 2) = 0$

$x = 0$

$\sqrt{x} - 2 = 0$

$\sqrt{x} = 2$

$x = 4$

$(0,0)$ $(0,4)$

חיתוך עם ציר ה-X

$x = 0$

$(0,0)$

ג. תחומים:

$y \geq 0$ $\quad x - 2\sqrt{x} \geq 0$

$x \geq 4$

1.

נכון / לא נכון: לפונקציה יש נקודת מקסימום יחידה.

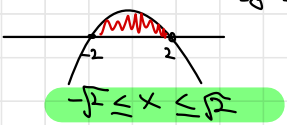
ד. $y = x\sqrt{2-x^2}$

תחום הגדרה:

$2 - x^2 \geq 0$

$x^2 \leq 2$

$-\sqrt{2} \leq x \leq \sqrt{2}$



ג. נגזרת ראשונה:

$y' = 1\cdot\sqrt{2-x^2} + x\cdot\frac{-2x}{2\sqrt{2-x^2}}$

$\frac{2-x^2-x^2}{\sqrt{2-x^2}} = \frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}}$

$y' = 0$

$\frac{2-2x^2}{\sqrt{2-x^2}} = 0$

$2 - 2x^2 = 0$

$2 = 2x^2$

$1 = x^2$

$\pm 1 = x$

	$-\sqrt{2}$	-1.2	-1	0	1	1.2	$\sqrt{2}$
y'		$-$	0	$+$	0	$-$	
y		↘	min	↗	max	↘	

$y = x\sqrt{2-x^2}$

$y(-\sqrt{2}) = -\sqrt{2}\sqrt{2-2} = 0$

$y(-1) = -1\sqrt{2-1} = -1$

$y(1) = 1\sqrt{2-1} = 1$

$y(\sqrt{2}) = 0$

$(-\sqrt{2}, 0)$

$(-1, -1)$ max

$(1, -1)$ min

$(\sqrt{2}, 0)$

ב. עלייה: $-1 < x < 1$

ירידה: $1 < x \leq \sqrt{2}$, $-\sqrt{2} \leq x < -1$

ג. נקי חיתוך:

עם ציר y	עם ציר x
$y=0$	$x=0$
$x=0$	$(0,0)$

$$y=x\sqrt{2-x^2}$$

$x=0$

$\sqrt{2-x^2}=0$

$x=\pm\sqrt{2}$

$(0,\sqrt{2})$ / $(0,-\sqrt{2})$

ד. אסימפטוטות:

אופקי: אין אנכי: אין

אלכסוני: אין אנכי: אין.

ו.

13. $y = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$

א. תחום: $1+x^2 \geq 0$

$x \in \mathbb{R}$

תשובה: כל x

ב. נגזרת ראשונה:

$$y = \frac{x^2+3}{\sqrt{x^2+1}}$$

$$y' = \frac{2x\cdot\sqrt{x^2+1} - (x^2+3)\cdot\frac{2x}{2\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2} = \frac{\frac{2x(x^2+1) - x(x^2+3)}{\sqrt{x^2+1}}}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2}$$

$$2x^3+2x \quad -x^3-3x$$

$$= \frac{x^3 - x}{\left(\sqrt{x^2+1}\right)^2\cdot\sqrt{x^2+1}}$$

$y' = 0$

$x^3 - x = 0$

$x(x^2-1) = 0$

$\boxed{x = 0}$

$x^2 = 1$

$\boxed{x = \pm 1}$

x	-2		-1		$-\frac{1}{\sqrt{2}}$		0		$\frac{1}{\sqrt{2}}$		1		2
y'		$-$	0	$+$		$+$	0	$-$		$-$	0	$+$	
y	$\searrow$		$\searrow$		min	$\nearrow$	max	$\searrow$		$\searrow$	min	$\nearrow$	

$(-1, \frac{2}{\sqrt{2}})$ $(0, 3)$ $(1, \frac{2}{\sqrt{2}})$

ג. תחומים: $x \leq -1$ או $x \geq 1$; $-1 \leq x \leq 0$ או $0 \leq x \leq 1$

ד. עליה: $x \leq -1$ או $x \geq 1$

ירידה: $-1 \leq x \leq 0$ או $0 \leq x \leq 1$

ג. שני הישרים:

$y=0$ ציר x:

$x^2+6=0$

$x^2=-6$ אין פתרון

ציר y: $x=0$

$(0,6)$

ד.

$\lim_{x\to\infty}=\frac{\infty}{\infty}$ נציב ∞

$\lim_{x\to\infty}\frac{2x}{2x}=1$ אין אסימפטוטה אופקית

ה.

14. $y = \frac{x^2}{\sqrt{x+1}}$

א. תנאי: שורש: $x+1 \geq 0$

$x \geq -1$

מכנה: $x+1 = 0$

$x = -1$

תנאי סופי: $x > -1$

$y' = \frac{2x \cdot \sqrt{x+1} - x^2 \cdot \frac{1}{2\sqrt{x+1}}}{(\sqrt{x+1})^2}$ <- נגזרת

$= \frac{\frac{4x(x+1) - x^2}{2\sqrt{x+1}}}{\frac{(\sqrt{x+1})^2}{1}} = \frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x+1})^2}$

$y' = 0$

$\frac{3x^2+4x}{2\sqrt{x+1} \cdot (\sqrt{x+1})^2} = 0$

$x(3x+4) = 0$

$x = 0$ ~~$x = -\frac{4}{3}$~~ לא בתחום הגזירה

	-1		$-\frac{1}{2}$		0		1	
y'		~	−	~	0	+		
y		↘		↘	min	↗		

$(0,0)$

ב. נק' חשודות: $x = 0$ / $(0,0)$

ג. תחום: $x > -1$

$0 > x > -1$ יורדת

$x > 0$ עולה $(0,\infty)$

١٠

المجال: $\mathbb{R}$

مقارب: $x=1$ ، $(0,0)$ ، $(1,0)$

שבר אלגברי

תנאי שיורש:

$x \geq 0$

$x - 8 \geq 0$

$x \geq 8$

תחום הגדרה:

$8 \geq x \geq 0$

8. $y = \sqrt{x} + \sqrt{x-8}$

מציאת נגזרת:

$y' = \frac{1}{2\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x-8}}$

$= \frac{\sqrt{x-8} + \sqrt{x}}{2\sqrt{x}\sqrt{x-8}}$

$y' = 0$

$\sqrt{x} + \sqrt{x-8} = 0$

$\sqrt{x} = -\sqrt{x-8}$

$x = x - 8$

$0 = -8$

$x = 4$

x	0		4		8
y'	0	+	0	−	0
y	0	↗	max	↘	0

$x = 4$ בנקודה y מקבל מקסימום

$(0, 0)$ מקבל מינימום

$(8, 0)$

נגזרת	נ"ק
$x = 0$	מינימום
$x = 8$	מינימום

ד. שני תחומים שווים זה לזה

$8 \geq x > 4$

ג. תחום: $4 > x \geq 0$

10.

ג) מהו גובה הגשר? מהו אורך הכבל הארוך ביותר?

ב) $y = 0.1x^2 - 1.6x + 8$, כאשר x הוא המרחק האופקי מהעמוד השמאלי

147 שאלה

10. $y = x^2\sqrt{6-x^2}$

תחום הגדרה: $6-x^2 \geq 0$; מתי: $-\sqrt{6} \leq x \leq \sqrt{6}$

$$y' = 2x\sqrt{6-x^2} + x^2 \frac{-2x}{2\sqrt{6-x^2}}$$

$$= \frac{2x(6-x^2) - x^3}{\sqrt{6-x^2}}$$

$$= \frac{12x - 2x^3 - x^3}{\sqrt{6-x^2}} = \boxed{\frac{-3x^3+12x}{\sqrt{6-x^2}}}$$

	$-\sqrt{6}$	-2.2	-2	-1	0	1	2	2.2	$\sqrt{6}$
y'	0	+	0	−	0	+	0	−	0
y	↗		↘		↗		↘		

$y' = 0$

$0 = -3x^3 + 12x$

$0 = -3x(x^2-4)$

$0 = x$

$0 = x^2 - 4$

$4 = x^2$

$\pm 2 = x$

$(-\sqrt{6}, 0)$ נק' קצה

$(\sqrt{6}, 0)$ נק' קצה

$(2, 4\sqrt{2})$ max

$(-2, 4\sqrt{2})$ max

$(0, 0)$ min

עולה: $0 < x < 2$, $-\sqrt{6} < x < -2$

יורדת: $2 < x < \sqrt{6}$, $-2 < x < 0$

ד. נקי תחומי ה־x שבהם הפונקציה עולה:

$$\begin{array}{|c|}\hline x \\ \hline y' \\ \hline y \\ \hline \end{array}$$

$y' = 0$

$-2x^2 + 9 = 0$

$x = 0$

$-2x + 9 = 0$

$(0, 9)$

$(0, 0)$ $(0, -9)$

ג. y הוא מקיצוני; x הוא שיעור ה־x של נקודת

$(0, 0)$

$\begin{array}{|c|}\hline x \\ \hline y' \\ \hline y \\ \hline \end{array}$

$x = 0$

$y' = 0$

$(0, 9)$ $(0, -9)$

ב.

ג. y הוא מקיצוני; x הוא שיעור ה־x של נקודת