שיעורי בית שיעור 10 .1

חורף 250

9. $a>4$ $f(x) = \cos 2x + a\sin x - 1$

$0 \le x \le 2\pi$

א.1. נק' חיתוך עם הצירים:

חיתוך ציר x

$y=0$

$\cos 2x = 1 - 2\sin^2 x$

$0 = 1 - 2\sin^2 x + a\sin x - 1$

$0 = -2\sin^2 x + a\sin x$

$0 = \sin x(-2\sin x + a)$

$\sin x = 0$

$\downarrow$

$x = \pi k$

k	x	
-1	$-$	✗
0	0	✓
1	π	✓
2	2π	✓
3	✗	

$\sin x = \frac{a}{2}$

לכן לא ניתן $\sin x$

$-1 < \sin x < 1$

$(0,0)$

$(\pi, 0)$

$(2\pi, 0)$

ציר y

$x=0$

$f(x) = \cos 2x + a\sin x - 1$

$\cos(0) + a\sin(0) - 1 = 0$

1   0

$(0,0)$

$$f'(x) = -\sin(2x)\cdot 2 + a\cos x$$

$$= -2(2\sin x \cdot \cos x) + a\cos x$$

$$= \cos x\left(-4\sin x + a\right)$$

$$f'(x) = 0$$

$$\cos x = 0$$

$$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$$

$$-4\sin x + a = 0$$

$$\sin x = \frac{-a}{-4}$$

$$\sin = \frac{a}{4}$$

$$\boxed{4 > a}$$

כפי שניתן לראות בגרף

$\sin x$

k	$x_1 = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$
-1	$-$
	X
0	$\frac{\pi}{2}$
	✓
1	X

k	$x_2 = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$
-1	X
0	X
1	$\frac{3\pi}{2}$
	✓

$\max\left(\frac{\pi}{2}, a-2\right)$ $\left(2\pi, 0\right)$

$\min\left(\frac{3\pi}{2}, -a-2\right)$

$\left(0, 0\right)$

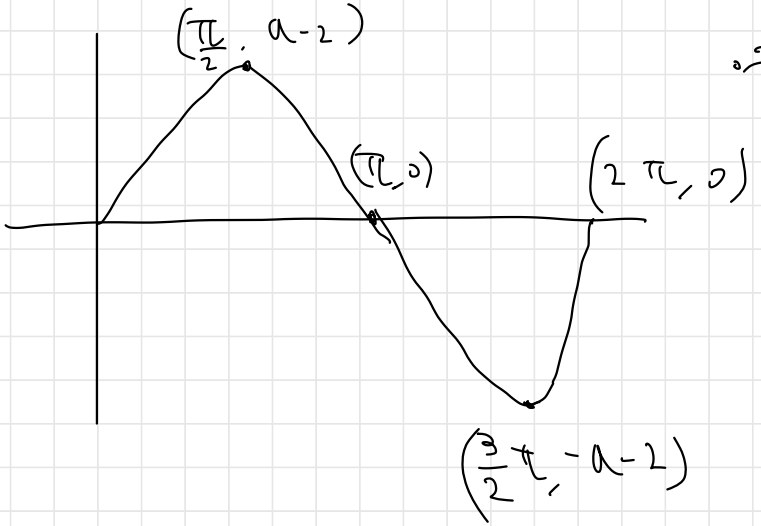
	0	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3}{2}\pi$	2π
y'	~	+	−	+	~
y	~	↗	↘	↗	~
		max		min	

$f'(x) = \cos x\left(-4\sin x + a\right)$

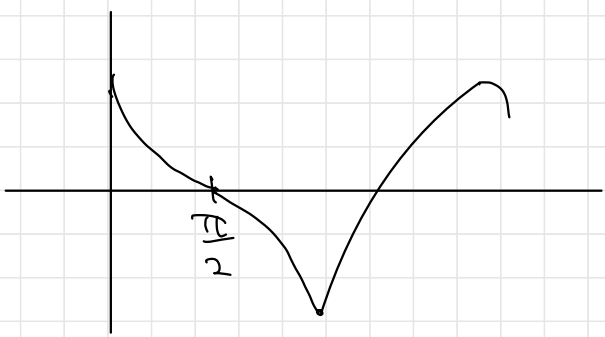
ג. יורד: $0 < x < \frac{\pi}{2}$ / $\frac{3}{2}\pi < x < 2\pi$

עולה: $\frac{\pi}{2} < x < \frac{3}{2}\pi$

ב.



ד.



13. $f(x) = \tan x - 8\sin x \qquad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

א. נגזור ונוכיח ש f הפונקציה:

$\tan = \frac{\sin x}{\cos x}$

$f(x) = \frac{\sin x}{\cos x} - 8\sin x$

$f(x) = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 8 \right)$

$f'(x) = 0$

$0 = \sin x$

$x = \pi k$

k	πk
-1	X
0	0 ✓
1	π X

$0 = \frac{1}{\cos x} - 8$

$8 = \frac{1}{\cos x}$

$\cos x = \frac{1}{8}$

$x = \pm 1.445 + 2\pi k$

k	$x = 1.445 + 2\pi k$
-1	X
0	1.445 ✓
1	X

k	$x = -1.445 + 2\pi k$
-1	X
0	-1.445 ✓
1	X

$$f(x) = \sin x \left(\frac{1}{\cos x} - 8 \right)$$

(0, 0)

(-1.445, 0)

(1.445, 0)

ב. נגזור ונשווה

(0, 0)

$$f'(x) = \frac{1}{\cos^2 x} - 8\cos x$$

$$= \frac{1 - 8\cos^3 x}{\cos^2 x}$$

$f'(x) = 0$

$$0 = 1 - 8\cos^3 x$$

$$\cos^3 x = \frac{1}{8} \quad /\sqrt[3]{}$$

$$\cos x = \frac{1}{2}$$

$$x = \pm \frac{1}{3}\pi + 2\pi k$$

k	$x = \frac{\pi}{3} + 2\pi k$
-1	x
0	$\frac{\pi}{3}$
1	x

k	$x = -\frac{\pi}{3} + 2\pi k$
-1	x
0	$-\frac{\pi}{3}$
1	x

	$-\frac{\pi}{2}$		$-\frac{4\pi}{9}$		$-\frac{\pi}{3}$		0		$\frac{\pi}{3}$		$\frac{4\pi}{9}$		$\frac{\pi}{2}$
y'	~		+		~		−		~		+		~
y	~		↗		~	↘			~	↗			~
					min				min				

$\left(-\frac{\pi}{3}, 3\sqrt{3}\right)$ max

$\left(\frac{\pi}{3}, -3\sqrt{3}\right)$ min

ב. תחום: $-\frac{\pi}{2} < x < -\frac{\pi}{3}$, $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{2}$

כיוון: $-\frac{\pi}{3} < x < \frac{\pi}{3}$

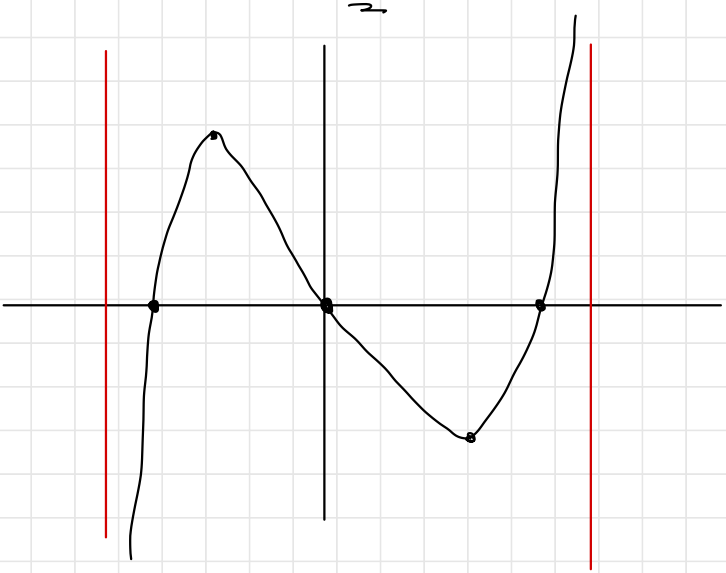
ג. אסימפטוטות אנכיות: $\cos x = 0 \rightarrow \frac{\pi}{2} / -\frac{\pi}{2}$

$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$

$\sin\left(-\frac{\pi}{2}\right) = -1$

$x = \frac{\pi}{2}$

$x = -\frac{\pi}{2}$



ד.

$\left(-\frac{\pi}{3}, 3\sqrt{3}\right)$ max

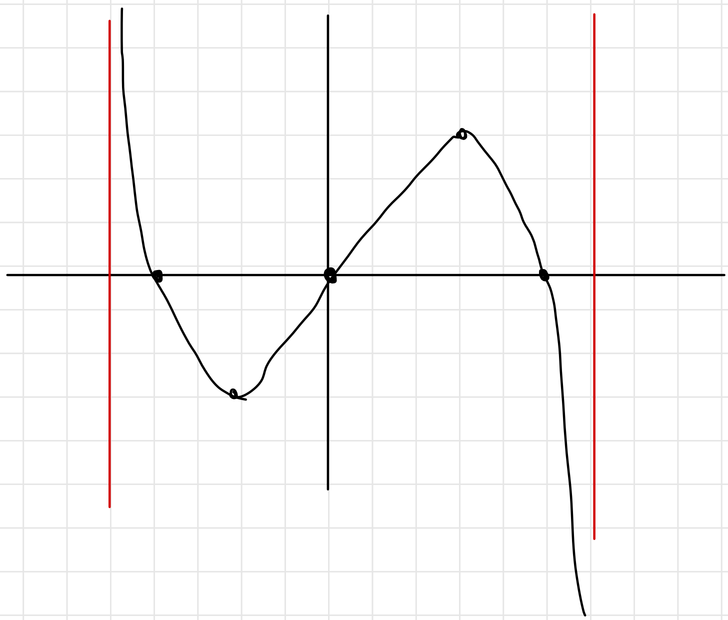
$\left(\frac{\pi}{3}, -3\sqrt{3}\right)$ min

$(0, 0)$

$(-1.445, 0)$

$(1.445, 0)$

1. $g(x)$ שגיאה → $g(x) = -f(x)$



18. $f(x) = \sin x - \frac{1}{\sin x}$

$0 \le x \le 2\pi$

תחום הגדרה: $\sin x \neq 0$

$x \neq \pi$

$x \neq 0, 2\pi$

נגזרת ראשונה:

$$f'(x) = \cos x - \frac{-\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \cos x + \frac{\cos x}{(\sin x)^2}$$

$$= \cos x \left(1 + \frac{1}{(\sin x)^2}\right)$$

$f'(x) = 0$

$$0 = 1 + \frac{1}{(\sin x)^2}$$

$$0 = \sin^2 x + 1$$

$$-1 = \sin^2 x$$

אין פתרון כי $\sin^2 x \geq 0$ לכל x

$\cos x = 0$

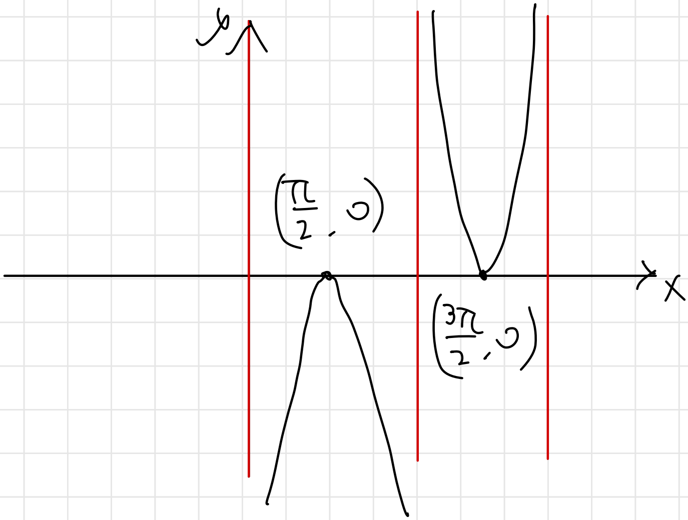
$x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

	0	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	π	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	2π	
y'	~	−	~	+	~	−	~	$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$ max
y	~	↗	~	↘	~	↘	~	$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$ min

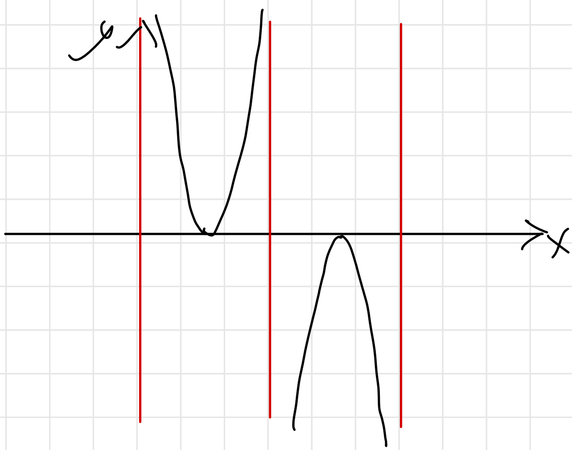
ז. אסימפטוטה מאונכות לציר ה-x

$x = 0, \pi, 2\pi$

ב. גרף:



ה. $g(x)$ היא פונקציה זוגית $g(x)=f(-x)$



עמ'
248

.5. $f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x + a\sin x + x$

א. $f'\left(\frac{\pi}{6}\right) = 0$

a-ר מצא את

$f'(x) = \cos 2x + a\cos x + 1$

$0 = \cos\left(2\cdot\frac{\pi}{6}\right) + a\cos\left(\frac{\pi}{6}\right) + 1$

$0 = \frac{1}{2} + a\frac{\sqrt{3}}{2} + 1$

$-\frac{3}{2} = a\frac{\sqrt{3}}{2}$

$-\sqrt{3} = a$

$f(x) = \frac{1}{2}\sin 2x - \sqrt{3}\sin x + x$

$f'(x) = \cos 2x - \sqrt{3}\cos x + 1$ $\quad 0 \le x \le \frac{3}{4}\pi \cdot 2$

$0 = 2\cos^2 x - 1 - \sqrt{3}\cos x + 1$

$0 = 2\cos^2 x - \sqrt{3}\cos x$

$0 = \cos x\left(2\cos x - \sqrt{3}\right)$

$\cos x = 0$ $\qquad$ $2\cos x = \sqrt{3}$

$x = \pm\frac{\pi}{2} + 2\pi k$ $\qquad$ $\cos x = \frac{\sqrt{3}}{2}$ $\qquad$ $x = \pm\frac{\pi}{6} + 2\pi k$

k	$x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$
-1	X
0	$\frac{\pi}{2}$ ✓
1	X

k	$x=-\frac{\pi}{2}+2\pi k$
-1	X
0	X
1	X

$0 \le x \le \frac{3}{4}\pi$

$\left(\frac{\pi}{2}, -0.16\right)$

k	$x=\frac{\pi}{6}+2\pi k$
-1	X
0	$\frac{\pi}{6}$
1	X

k	$x=-\frac{\pi}{6}+2\pi k$
-1	X
0	X
1	X

$\left(\frac{\pi}{6}, 0.09\right)$

$(0, 0)$

$\left(\frac{3\pi}{4}, 0.63\right)$

הגדול ביותר 0.63

הקטן ביותר -0.16

$-0.16 < f(x) < 0.63$

3. הוכחת אי-זוגיות

$f(x) = \frac{1}{2}\cdot \sin 2x + a\sin x + x$ $\qquad -f(x) = f(-x)$

$-\frac{3}{4}\pi \le x \le 0$

$$f(-x) = \frac{1}{2}\sin(-2x) + a\sin(-x) - x$$

$$= -\frac{1}{2}\sin(2x) - a\sin x - x$$

$\boxed{\sin(-\alpha) = -\sin\alpha}$

$$-f(x) = -\frac{1}{2}\sin(2x) - a\sin x - x$$

הוכחנו שמתקיים $-f(x) = f(-x)$ ולכן $f(x)$ אי-זוגית

מכיוון ש- $f(x)$ היא אי זוגית כל ערכי בתחום $\frac{3\pi}{4} \le x \le 0$ יהיו הפוכים לסימן בתחום $0 \le x \le \frac{3\pi}{4}$

$$-0.63 \le f(x) \le 0.16$$

ה. נמצא את a אם נתון שהישר $y = x$ משיק ל- $f(x)$ בראשית הצירים.

ערך הנגזרת בנקודה היא 1. שיפוע הישר $y = x$.

$$f'(0) = 1$$

$$f'(x) = \cos 2x + a\cos x + 1$$

$1 = 1 + a + 1$

$\boxed{-1 = a}$

$1 = \cos 2x - \cos x + 1$ .2

$0 = \cos 2x - \cos x$

$\cos x = \cos 2x$

$2x = \pm x + 2\pi k$

$2x = x + 2\pi k$

$x = 2\pi k$

$y(2\pi k) = 0 - 0 + 2\pi k$

$= 2\pi k \rightarrow (2\pi i, 2\pi i)$

$2x = -x + 2\pi k$

$3x = 2\pi k$

$x = \frac{2\pi k}{3}$

$y = \left(\frac{2\pi k}{3}\right) =$

$\frac{1}{2} \sin\left(\frac{4\pi k}{3}\right) - \sin\left(\frac{2\pi k}{3}\right)$

$+ \frac{2\pi k}{3}$

$x = \frac{2\pi k}{3}$

10. $-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$ בקטע $f(x)$ מוגדרת

$$f'(x) = \cos^2 x - 2\cos x$$

$f''(x) = 0$ אלו הנקודות החשודות כקיצון

$$f''(x) = 2\cos x \cdot -\sin x + 2\sin x$$
$$= 2\sin x(-\cos x + 1)$$
$$0 = 2\sin x(-\cos x + 1)$$

$\sin x = 0$

$x = \pi k$

k	$x = \pi k$
-1	$-\pi$ X
0	0 ✓
1	π ✓

$\cos x = 1$

$x = 2\pi k$

k	$x = 2\pi k$
-1	-2 X
0	0 ✓
1	2 X

$(\pi, 3)$ max $(0, -1)$ min

$\left(-\frac{\pi}{2}, \right)$ $\left(\frac{3\pi}{2}, \right)$

2.

	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{3}$	0	$\frac{\pi}{2}$	π	1.2π	$\frac{3\pi}{2}$
y'	∪	−	∩	+	∪	−	∩
y	∪	↘	∩ min	↗	∪ max	↘	∩

$f'(x) = \cos^2 x - 2\cos x$

ד. נק' חיתוך עם הצירים:

ציר X

$y=0$

$0 = \cos x(\cos x - 2)$

$\cos x = 0$ ⟸ $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

~~$\cos x = 2$~~ נפסל

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

k	x
-1	X
0	$\frac{\pi}{2}$ ✓
1	X

$x = -\frac{\pi}{2} + 2\pi k$

k	x
-1	X
0	$-\frac{\pi}{2}$ ✓
1	$\frac{3\pi}{2}$ ✓

$\left(\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\left(-\frac{\pi}{2}, 0\right)$

$\left(\frac{3\pi}{2}, 0\right)$

ציר y

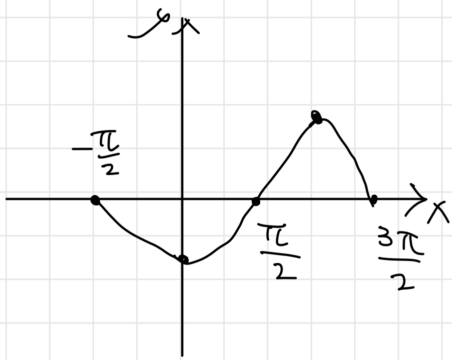
$x=0$

$f(x) = \cos^2 x - 2\cos x$

$= 1 - 2 = -1$

$(0, -1)$

3.



ה. ערכי ה-x של f(x) הם: $x = -\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$

לפי העליות והירידות של הגרף ב- $f'(x)$

נמצא קיצון ש- $\left(-\frac{\pi}{2}, \right)$ max $\left(\frac{\pi}{2}, \right)$ min $\left(\frac{3\pi}{2}, \right)$ max

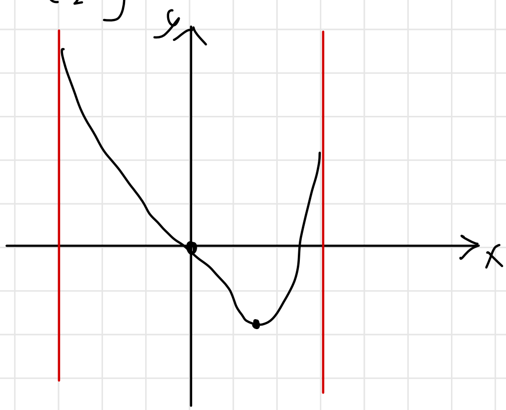
1. עליה: הפונקציה עולה כשהנגזרת חיובית

$\frac{\pi}{2} < x < \frac{3\pi}{2}$

ירידה: הפונקציה יורדת כשהנגזרת שלילית

$-\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}$

5. נמין $\quad f(0)=0 \quad f(-\frac{\pi}{2}) < f(\frac{3}{2}\pi)$



19. $f(x)=\frac{1}{\sin x+\cos x}$

תחום הגדרה:

$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{7}{4}\pi$

ב. $\sin x+\cos x \neq 0$:

$-\sin x \neq \cos x$

$\sin(x) = \sin(0.5\pi - x)$

$x = 0.5\pi - x + 2k\pi$

$-x = \pi - (0.5\pi - x) + 2k\pi$

$2x = 0.5\pi + 2k\pi$

$x = 0.25\pi + k\pi$

k	x
-1	x
0	-0.25π ✓
1	0.75π ✓
2	1.75π ✓
3	x

תשובה: $x \neq -0.25\pi, 0.75\pi, 1.75\pi$

ג. נגזרת:

$f(x)=\frac{1}{\sin x+\cos x}$ $\quad f'(x) = \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\sin x+\cos x)^2}$

$\sin x + \cos x = 0$

$\cos x = \sin x$

$\sin(x-\frac{\pi}{2}) = \sin x$

$-\frac{\pi}{4} \le x \le \frac{7}{4}\pi$ ראשון

$x = \pi - (\frac{\pi}{2} - x) + 2\pi k$ $\quad x = \frac{\pi}{2} - x + 2\pi k$

$x = \frac{\pi}{2} + x + 2\pi k$ $\quad 2x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$

$0 = \pi + 2\pi k$ $\quad x = \frac{\pi}{4} + \pi k$

$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$

k	$x_1 = \frac{\pi}{4} + \pi k$
-1	$-\frac{3}{4}\pi$
0	$\frac{\pi}{4}$ ✓
1	$\frac{5}{4}\pi$ ✓

$f'(x) = \frac{-(\cos x - \sin x)}{(\sin x + \cos x)^2}$

$(\frac{\pi}{4}, \frac{1}{\sqrt{2}})$ min

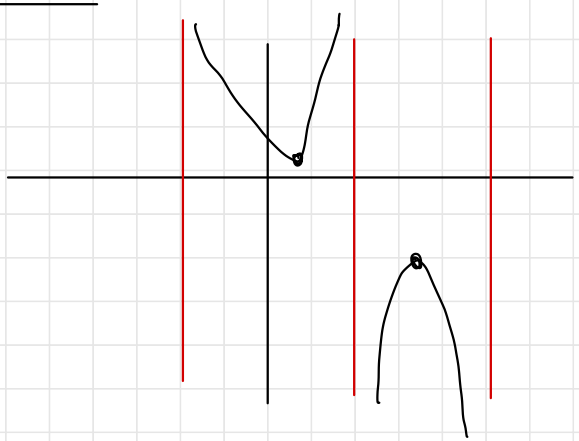
$(\frac{5\pi}{4}, -\frac{1}{\sqrt{2}})$ max

	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}$	$\frac{7}{4}\pi$
f'		$-$		$+$		$+$		$-$	
f		↓	min	↗		↗	max	↓	

לא קיים $\quad$ קיים $\quad$ לא קיים

ב. $x \in -0.25\pi, 0.75\pi, 1.75\pi$ קיים

ג.



ד.

$g(x) = \sin x + \cos x$

$g'(x) = \cos x - \sin x$

1. נק' חיתוך ציר x.

ציר x $y=0$

$0 = \sin x + \cos x$

מתוך מעגל ה

$x_1 = \frac{\pi}{4}$, $x_2 = \frac{3\pi}{4}$, $x_3 = \frac{7\pi}{4}$

2. נק' קיצון פנימיות

$g'(x) = 0$

$0 = \cos x - \sin x$

מתוך מעגל ה

$x = \frac{\pi}{4}$ $x = \frac{5\pi}{4}$

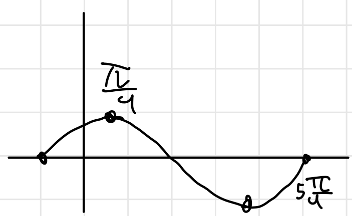
$g\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sqrt{2}$

$g\left(\frac{5\pi}{4}\right) = -\sqrt{2}$

	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{6\pi}{4}$	$\frac{7\pi}{4}$
$g'(x)$		+		−		+	
$g(x)$		↗		↘		↗	
			max		min		

$\left(\frac{\pi}{4}, \sqrt{2}\right)$ max , $\left(\frac{5}{4}\pi, -\sqrt{2}\right)$ min

$g\left(-\frac{\pi}{4}\right) = 0$, $g\left(\frac{7\pi}{4}\right) = 0$



20. $f(x) = \sin(x^2 - 4x)$ $0 \le x \le 4$

א. מציאת שורשי x:

$$0 = \sin(x^2 - 4x)$$

$$\pi k = x^2 - 4x$$

$$x^2 - 4x - \pi k = 0$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 - 4\pi k}}{2}$$

$$x = 0,\ 1.07,\ 2.92,\ 4$$

$(0,0)$ (1.07) $(2.92,\ )$ $(4,0)$

ב. $f(x) = \sin(x^2 - 4x)$

$$f'(x) = \cos(x^2 - 4x)(2x - 4)$$

$$f'(x) = 0$$

$$0 = \cos(x^2 - 4x)(2x - 4)$$

$$\frac{\pi}{2} + \pi k = x^2 - 4x \qquad 0 = 2x - 4$$

$$x^2 - 4x - \frac{\pi}{2} - \pi k = 0 \qquad 2 = \frac{x}{3}$$

$$x = \frac{4 \pm \sqrt{16 + 2\pi - 4\pi k}}{2}$$

$x_1 = 0.441$, $x_2 = 3.559$

	0	0.3	0.441	1	2	2.5	3.559	3.6	4
y'	+	−	0	+	0	−	0	+	+
y	0	↘	min	↗	max	↘	min	↗	0

$(2, 0.756)$

$(3.556, -1)$

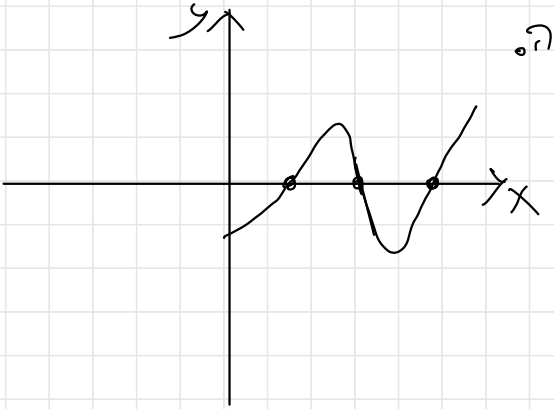
$(0.441, -1)$

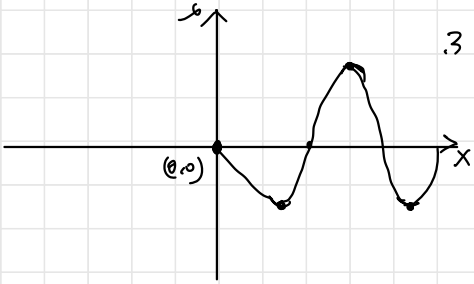
$(4,0)$

$(0,0)$

ג. עולה: $0.441 < x < 2$, $3.559 < x < 4$

יורדת: $0 < x < 0.441$, $2 < x < 3.559$


y
x


y
x
(0,0)