# שאלה מס' 2

נתון: $a_n$ סדרה הנדסית אין-סופית

$q$ = מנה

$a_1 = a_1$

א. (1) נס״: A ← סכום האיברים במקומות הזוגיים עד האיבר במקום ה- 40.

B ← האיברים במקומות 4, 8, 12. אינדקס הסדרה מהווה סדרה חשבונית בקפיצות של 4 עד האיבר ה 40.

מס האיברים ב A ← נתייחס לאינדקס הסדרה כסדרה חשבונית שהאיבר הראשון שלה הוא 2, ההפרש 2 והאחרון 40.

$$a_n=40, \quad a_1=2, \quad d=2, \quad n-?$$

$$a_n=a_1+d(n-1) \to 40=2+2(n-1) \to 40=2n \to \boxed{20=n}$$

מס' האיברים ב B ← אינדקס הסדרה הוא סדרה חשבונית.

$$a_1=4, \quad a_n=40, \quad d=4, \quad n=?$$

$$a_n=a_1+d(n-1) \to 40=4+4(n-1) \Rightarrow \boxed{n=10}$$

(1) סכום 20 האיברים במקומות הזוגיים, האיבר הראשון הוא $a_2$, המנה הוא $q^2$.

$$S_{20}=\frac{a_2((q^2)^{20}-1)}{q^2-1} \rightarrow \boxed{\frac{a_1\cdot q(q^{40}-1)}{q^2-1}}$$ (1)

(2) סכום 10 האיברים במקומות בהפרש של 4.
האיבר הראשון הוא $a_4$ והמנה היא $q^4$.

$$S_{10}=\frac{a_4((q^4)^{10}-1)}{q^4-1} \rightarrow \boxed{\frac{a_1\cdot q^3(q^{40}-1)}{q^4-1}}$$

ג. נתון כי $a_n$ סדרה עולה וכי $\frac{A}{B}=\frac{10}{9}$

$$\frac{10}{9}=\frac{\cancel{a_1}\cdot \cancel{q}(\cancel{q^{40}-1})}{q^2-1}\cdot\frac{(q^4-1)}{\cancel{a_1}\cdot q^{\cancel{3}\,2}(\cancel{q^{40}-1})} \rightarrow \frac{\cancel{(q^2-1)}(q^2+1)}{\cancel{(q^2-1)}\cdot q^2}$$

$$\rightarrow \frac{10}{9}=\frac{(q^2+1)}{q^2} \rightarrow 10q^2=9q^2+9 \rightarrow q^2=9$$

$$\rightarrow q=\pm 3$$

מכיוון שנתון ש $a_n$ סדרה עולה ולכן $q$ חיובי ושווה ל-3.

4. נתונים $a_n$ סדרה הנדסית אינסופית המקיימת לכל $n$

טבעי $b_n=3\cdot a_{(n+1)}$

ב": את מנת הסדרה $b_n$.

ע"פ הגדרת סדרה הנדסית: $q_b = \frac{b_{n+1}}{b_n}$

$$b_{(n+1)} = 3\cdot a_{(n+2)} \quad , \quad b_n = 3\cdot a_{(n+1)}$$

מכיון שידוע $a_n$ סדרה הנדסית שמנתה 3, ~~המנה~~ המנה $\frac{a_{n+2}}{a_{n+1}}=3$

$$\frac{\cancel{3}\cdot a_{(n+2)}}{\cancel{3}\cdot (a_{n+1})} = 3 \rightarrow$$

מנת הסדרה $b_n$ הוא 3.

3. נתונים סדרה הנדסית אינסופית חדשה, האיבר הראשון שלה

הוא $-\frac{1}{b_1}$ והשני $\frac{1}{b_2}$.

מנת הסדרה קבועה ושווה ל- $\frac{\text{איבר שני}}{\text{איבר ראשון}}$ $\rightarrow$ $$\frac{\frac{1}{b_2}}{-\frac{1}{b_1}}$$

$$-\frac{b_1}{b_2} \Rightarrow b_2 = b_1\cdot q \rightarrow \left| b_1\cdot 3 \right|$$

ע"פ ההוכחה בסעיף א.

לכן:
$$-\frac{b_1}{b_2} \rightarrow -\frac{\cancel{b_1}}{3\cdot \cancel{b_1}} = -\frac{1}{3}$$

מנת הסדרה החדשה הוא $-\frac{1}{3}$.

ג: סכום איברי הסדרה החדשה באמצעות $a_1$.

$$S_{\text{אינסוף}} = \frac{b_1}{q-1} \rightarrow \frac{b_1}{-\frac{4}{3}}$$

$$b_1 = 3\cdot a_2 = 3\cdot 3\cdot a_1 \rightarrow 9a_1 \rightarrow \frac{9a_1}{-\frac{4}{3}} \rightarrow -\frac{27a_1}{4}$$

סכום איברי הסדרה האינסופית החדשה הוא $\boxed{-\frac{27a_1}{4}}$

ה. נתונה סדרה חדשה:

$$\frac{1}{a_1},\ a_1,\ b_1$$

א) האם יתכן שסדרה זו חשבונית?

אסדר את הסדרה ואציב $b_1 = 9a_1$

$$\frac{1}{a_1},\ a_1,\ 9a_1$$

על מנת שסדרה זו תהיה חשבונית ההפרש בין האיבר השלישי לשני צריך להיות שווה להפרש בין האיבר השני לראשון.

$$9a_1 - a_1 = a_1 - \frac{1}{a_1}$$

$$7a_1 = -\frac{1}{a_1}$$

$a_1$ הוא שלילי מכיוון שנתון ש $a_n$ סדרה הנדסית אין-סופית עולה. הביטוי $-\frac{1}{a_1}$ הוא חיובי לעומת הביטוי $7a_1$ ולכן מדובר בפסוק שקר וסדרה זו לא יכולה להיות חשבונית.

(ב) על מנת שסדרה זו תהיה הנדסית המנה בין האיבר ה-3 ל-2 צריכה להיות שווה למנה בין האיבר השני ל-1.

$$\frac{a_1}{\frac{1}{a_1}} = \frac{9\cancel{a_1}}{\cancel{a_1}} \rightarrow a_1^2 = 9 \rightarrow a_1 = \pm 3$$

כלומר, במידה ו $a_1$ יהיה שווה ל- $\boxed{-3}$ הסדרה הנ"ל תוכל להיות הנדסית ולכן התשובה היא כן.