מדינת ישראל
משרד החינוך

מועד ב

סוג הבחינה: בגרות
מועד הבחינה: קיץ תשפ"א, 2021, **מועד ב**
מספר השאלון: 035581
נספח: דפי נוסחאות ל־5 יחידות לימוד

שים לב: בבחינה זו יש הנחיות מיוחדות.
יש לענות על השאלות על פי הנחיות אלה.

מתמטיקה

5 יחידות לימוד — שאלון ראשון

הוראות לנבחן

א. <u>משך הבחינה</u>: שלוש שעות וחצי.

ב. <u>מבנה השאלון ומפתח ההערכה</u>: בשאלון זה שלושה פרקים, ובהם שמונה שאלות.
פרק ראשון — אלגברה והסתברות
פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור
פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות
עליך לענות על <u>ארבע</u> שאלות לבחירתך — $4\times25 = 100$ נקודות.

ג. <u>חומר עזר מותר בשימוש</u>:
(1) מחשבון לא גרפי. אין להשתמש באפשרויות התכנות במחשבון שיש בו אפשרות תכנות. שימוש במחשבון גרפי או באפשרויות התכנות במחשבון עלול לגרום לפסילת הבחינה.
(2) דפי נוסחאות (מצורפים).

ד. <u>הוראות מיוחדות</u>:
(1) אל תעתיק את השאלה; סמן את מספרה בלבד.
(2) התחל כל שאלה בעמוד חדש. רשום במחברת את שלבי הפתרון, <u>גם</u> כאשר החישובים מתבצעים בעזרת מחשבון.
הסבר את <u>כל</u> פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה ומסודרת.
חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

כתוב <u>במחברת הבחינה בלבד</u>. רשום "טיוטה" בראש כל עמוד המשמש טיוטה.
כתיבת טיוטה בדפים שאינם במחברת הבחינה עלולה לגרום לפסילת הבחינה.

ההנחיות בשאלון זה מנוסחות בלשון זכר ומכוונות לנבחנות ולנבחנים כאחד.

בהצלחה!

/המשך מעבר לדף/

השאלות

שים לב: הסבר את כל פעולותיך, כולל חישובים, בפירוט ובצורה ברורה.

חוסר פירוט עלול לגרום לפגיעה בציון או לפסילת הבחינה.

ענה על ארבע מן השאלות 1-8 (לכל שאלה — 25 נקודות).

שים לב: אם תענה על יותר מארבע שאלות, ייבדקו רק ארבע התשובות הראשונות שבמחברתך.

פרק ראשון — אלגברה והסתברות

1. נטע, דניאלה ורוני מתאמנות בהליכה ובריצה במסלול AB שאורכו 40 ק"מ.

בשעה 8:00 יצאה נטע מנקודה A והלכה במהירות של 4 קמ"ש לכיוון נקודה B.

בשעה 9:36 יצאה דניאלה מנקודה B ורצה לכיוון נקודה A.

שעתיים לאחר צאתה של נטע, יצאה רוני מנקודה B ורצה במהירות של 12 קמ"ש לכיוון נקודה A.

נטע ורוני נפגשו ולאחר מכן המשיכו בדרכן.

שעה ו־36 דקות אחרי שנטע ורוני נפגשו, הגיעה דניאלה לנקודה A.

המהירות של כל אחת מן המתאמנות היא קבועה באימון כולו.

א. באיזו שעה נפגשו נטע ורוני?

ב. מהי מהירות הריצה של דניאלה? נמק את תשובתך.

ג. האם שלוש המתאמנות נפגשו בנקודה אחת לאורך המסלול? נמק את תשובתך.

כל מתאמנת שמגיעה לקצה המסלול מייד מסתובבת וחוזרת לנקודה שממנה היא יצאה.

ד. באיזה מרחק מן הנקודה B נפגשו נטע ורוני בפעם השנייה? נמק את תשובתך.

/המשך בעמוד 3/

2. נתונה סדרה הנדסית אין־סופית a_n, שאיבריה a_1 , a_2 , a_3 , ... , והמנה שלה q .

א. הבע באמצעות a_1 ו־ q את ערכי הסכומים שלפניך.

(1) $A = a_2 + a_4 + a_6 + ... + a_{40}$.

(2) $B = a_4 + a_8 + a_{12} + ... + a_{40}$.

נתון כי a_n היא סדרה עולה וכי $\frac{A}{B} = \frac{10}{9}$.

ב. מצא את ערכו של q .

בונים מן הסדרה a_n הנתונה סדרה הנדסית אין־סופית b_n המקיימת לכל n טבעי: $b_n = 3 \cdot a_{n+1}$.

ג. מצא את המנה של הסדרה b_n .

בונים סדרה הנדסית אין־סופית חדשה: $... , \frac{1}{b_4} , -\frac{1}{b_3} , \frac{1}{b_2} , -\frac{1}{b_1}$.

ד. הבע את הסכום של כל איברי הסדרה החדשה באמצעות a_1 .

נתונה הסדרה: $b_1 , a_1 , \frac{1}{a_1}$.

ה. **(1)** האם ייתכן שסדרה זו חשבונית? נמק את תשובתך.

(2) האם ייתכן שסדרה זו הנדסית? נמק את תשובתך.

3. בתחרות ספורט שנערכת בבית ספר משתתפים תלמידים רבים. כל משתתף צריך להצליח לעבור 3 מכשולים בזה אחר זה לפי הסדר. משתתף שלא מצליח לעבור מכשול מודח מייד מן התחרות. ההסתברות להצליח לעבור מכשול שונה ממכשול למכשול, אך שווה לכל המשתתפים. משתתף שמצליח לעבור את כל שלושת המכשולים עולה לשלב חצי הגמר.
28% מן המשתתפים בתחרות הצליחו לעבור את שני המכשולים הראשונים. ההסתברות שמשתתף שמצליח לעבור את שני המכשולים הראשונים יודח מן התחרות גדולה פי 3 מן ההסתברות שהוא יעלה לשלב חצי הגמר.

א. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות יעלה לשלב חצי הגמר.

ההסתברות שמשתתף יצליח לעבור את המכשול הראשון ולא יעבור את המכשול השני היא 0.42 .

ב. חשב את ההסתברות שמשתתף בתחרות <u>לא</u> יצליח לעבור את המכשול הראשון.

ג. בחרו באקראי שלושה משתתפים: עומר, גל וליאור. ידוע ששלושתם הצליחו לעבור את המכשול הראשון.

(1) חשב את ההסתברות שבדיוק שניים מהם יעלו לשלב חצי הגמר.

(2) חשב את ההסתברות שמבין השלושה, רק עומר וגל יעלו לשלב חצי הגמר.

/המשך בעמוד 4/

פרק שני — גאומטריה וטריגונומטריה במישור

.4 שני מעגלים משיקים זה לזה מבפנים בנקודה P (ראה סרטוט).

מרכזי המעגלים הם הנקודות M ו־ N,

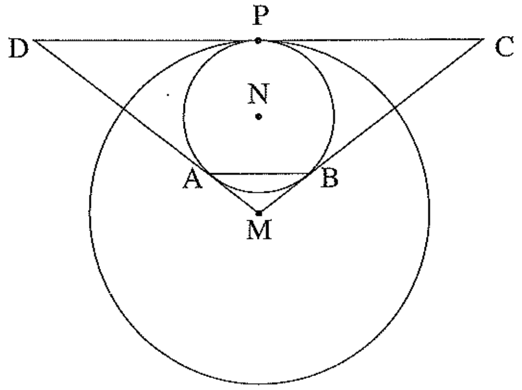
והרדיוסים שלהם הם R_1 ו־ R_2 בהתאמה, $R_2 < R_1$.

מעבירים משיק משותף לשני המעגלים דרך הנקודה P.

מן הנקודה M יוצאים שני ישרים המשיקים למעגל שמרכזו N בנקודות A ו־ B.

ישרים אלה חותכים את המשיק המשותף לשני המעגלים

בנקודות C ו־ D, כמתואר בסרטוט.



א. הוכח כי $AB \perp MN$.

ב. הוכח כי $AB \parallel DC$.

ג. הוכח כי $NB \cdot MC = MN \cdot \frac{DC}{2}$.

נתון: $\frac{R_1}{R_2} = \frac{7}{3}$, $MN = 8$.

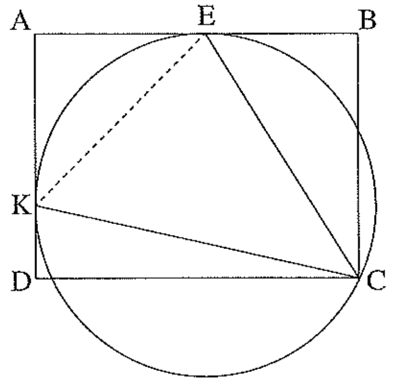
ד. **(1)** מצא את R_1 ואת R_2.

(2) מצא את DC.

.5 המרובע $ABCD$ הוא מלבן ששתיים מצלעותיו, AB ו־ AD,

משיקות למעגל שרדיוסו R בנקודות E ו־ K בהתאמה (ראה סרטוט).

הנקודה C נמצאת על המעגל.



א. הוכח: $\sphericalangle KCE = 45^\circ$.

נתון: $\sphericalangle KCD = \alpha$, $0^\circ < \alpha < 45^\circ$.

ב. **(1)** הבע באמצעות α את הזוויות של המשולש KCE.

(2) הבע באמצעות R ו־ α את האורכים של צלעות המשולש KCE.

ג. הבע באמצעות α את היחס $\frac{EB}{AE}$.

נתון: $\frac{EB}{AE} = \frac{\sqrt{2}}{2}$.

ד. חשב את α.

/המשך בעמוד 5/

פרק שלישי — חשבון דיפרנציאלי ואינטגרלי של פולינומים, של פונקציות שורש, של פונקציות רציונליות ושל פונקציות טריגונומטריות

.6 נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{x^2}{\sqrt{x^2-a^2}}$, $a>0$ הוא פרמטר.

הבע את תשובותיך באמצעות a , אם יש צורך.

א. מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ב. הוכח כי הפונקציה $f(x)$ היא זוגית.

ג. **(1)** מצא את שיעורי נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים (אם יש כאלה).

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים (אם יש כאלה).

(3) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

(4) סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונה הפונקציה $(f(x))^2$ שתחום ההגדרה שלה זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ד. מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $(f(x))^2$, וקבע את סוגן.

נתונה הפונקציה $g(x)=\frac{1}{(f(x))^2}$. תחום ההגדרה של הפונקציה $g(x)$ זהה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

ה. הסתמך על הסעיפים הקודמים וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

הצב: $a=2$.

ו. חשב את השטח המוגבל על ידי הגרף של הפונקציה $g(x)$, על ידי ציר ה־ x ועל ידי הישרים $x=3$ ו־ $x=4$.

/המשך בעמוד 6/

7. נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{\cos^2(x)}{\sin(x)}+3$;

ענה על הסעיפים שלפניך בתחום $0\le x\le 2\pi$.

א. **(1)** מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את משוואות האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המאונכות לצירים.

(3) מצא את תחומי העלייה והירידה של הפונקציה $f(x)$.

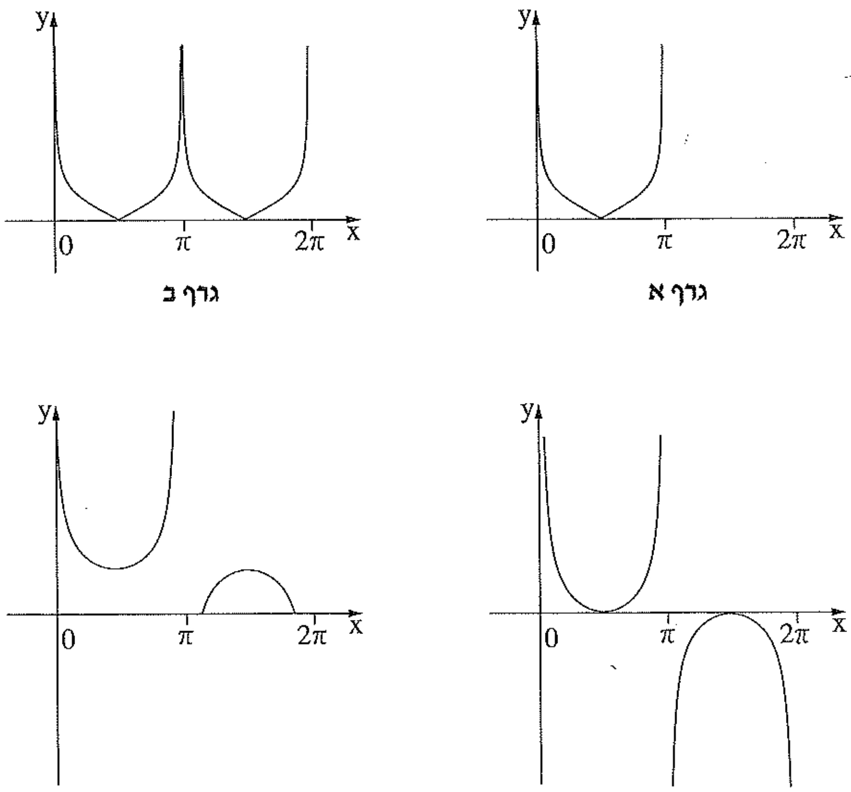
(4) מצא את שיעורי נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

נתונות שתי פונקציות: $k(x)=f(x)-3$, $g(x)=\sqrt{f(x)-3}$.

ג. אחד מן הגרפים א–ד שלפניך מתאר את הפונקציה $k(x)$, ואחד מן הגרפים מתאר את הפונקציה $g(x)$.

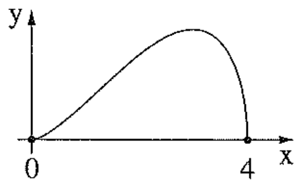
קבע איזה מן הגרפים מתאר כל אחת מן הפונקציות, ונמק את קביעותיך.



גרף א גרף ב גרף ג גרף ד

/המשך בעמוד 7/

8. בסרטוט שלפניך מוצגת הפונקציה $f(x)=\sqrt{a\cdot x^4+b\cdot x^3}$.
נתון שתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$ הוא $0\le x\le 4$.



א. **(1)** הוכח כי $b=-4\cdot a$.

(2) לפניך שתי טענות I– II . רק אחת מהן נכונה. קבע מהי הטענה הנכונה, ונמק את קביעתך.

I. $a>0\,,\,b<0$.

II. $a<0\,,\,b>0$.

הנקודה P נמצאת על גרף הפונקציה $(f(x))^2$ המוגדרת גם היא בתחום $0\le x\le 4$. מנקודה P מעבירים ישר המאונך לציר ה־ x . M היא נקודת החיתוך של האנך עם ציר ה־ x , ו־ O היא ראשית הצירים.

ב. מהו שיעור ה־ x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

ג. בעבור שיעור ה־ x שמצאת בסעיף ב, בטא באמצעות a את השטח המקסימלי של המשולש PMO .

ד. אם ידוע כי שיעור ה־ x של הנקודה P נמצא בתחום שבו הפונקציה $(f(x))^2$ <u>אינה</u> יורדת, מהו שיעור ה־ x של הנקודה P שבעבורו שטח המשולש PMO הוא מקסימלי? נמק את תשובתך.

בהצלחה!