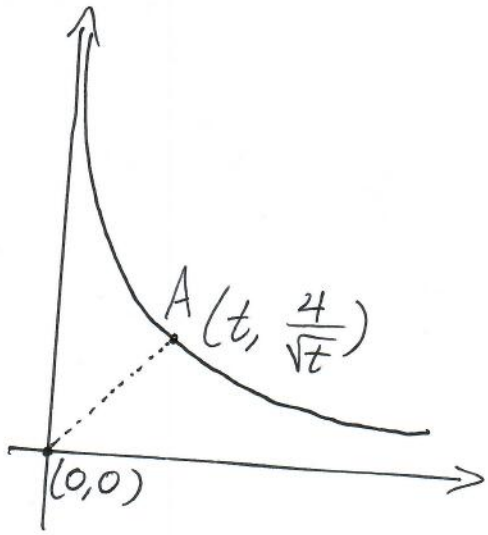

$f(x) = \frac{24}{\sqrt{x}}$ (8)

תנאי:

$x > 0$

$A = (t, \frac{24}{\sqrt{t}})$ (א)

נקודה כלשהי על הפונקציה $f(x)$ ולכן $t > 0$.

פונקציית המרחק תיקבע את מרחק הנקודה A מראשית הצירים:

$$f(t) = \sqrt{(t-0)^2 + (\frac{24}{\sqrt{t}} - 0)^2} = \sqrt{t^2 + \frac{16}{t}}$$

על מנת למצוא את המרחק המינימלי נגזור ונשווה ל-0:

$$f'(t) = \frac{2t + \frac{0 \cdot t - 1 \cdot 16}{t^2}}{2\sqrt{t^2 + \frac{16}{t}}} \Rightarrow \frac{2t - \frac{16}{t^2}}{2\sqrt{t^2 + \frac{16}{t}}} \Rightarrow \frac{\frac{2t^3 - 16}{t^2}}{2\sqrt{t^2 + \frac{16}{t}}} \Rightarrow$$

מכנה משותף

$$\Rightarrow \frac{2t^3 - 16}{2t^2\sqrt{t^2 + \frac{16}{t}}} = \frac{\cancel{2}(t^3 - 8)}{\cancel{2}t^2\sqrt{t^2 + \frac{16}{t}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(t) = \frac{t^3 - 8}{t^2\sqrt{t^2 + \frac{16}{t}}}}$$

(א) (ד) המשך: נשווה את הנגזרת ל- 0:

$$\frac{t^3-8}{t^2\sqrt{t^2+\frac{16}{t}}}=0 \;/\cdot t^2\sqrt{t^2+\frac{16}{t}} \Rightarrow t^3-8=0 \;/+8$$

$$t^3=8 \;/\sqrt[3]{}$$

$$\boxed{t=2}$$

נגדיר טבלה על מנת להוכיח שאכן התקבל ערך מינימלי:

x	0	1	2	3
y'		−	0	+
y		↘	Min	↗

$$f'(t)=\frac{t^3-8}{t^2\sqrt{t^2+\frac{16}{t}}}$$

$$f'(t=1)=\boxed{-}$$

$$f'(t=3)=\boxed{+}$$

שיעורי הנקודה A עבורה המרחק הוא מינימלי הם: $\boxed{(2,2\sqrt{2})}$.

(א) (ב) שיפוע הישר AO שווה ל- $\frac{2\sqrt{2}-0}{2-0} \Rightarrow \boxed{m_{AO}=\sqrt{2}}$

שיפוע המשיק בנקודה A:

$$f'(x)=\frac{\cancel{0\cdot\sqrt{x}}-4\cdot\frac{1}{2\sqrt{x}}}{(\sqrt{x})^2}=-\frac{\frac{2}{\sqrt{x}}}{x}\Rightarrow\boxed{-\frac{2}{x\sqrt{x}}}$$

$$f'(x=2)=-\frac{2}{2\sqrt{2}}=\boxed{-\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

(א) (ב) המשך:

נבדוק האם הישרים מאונכים בעזרת מכפלת השיפועים:

$$\sqrt{3}\cdot\left(-\frac{1}{\sqrt{3}}\right)=\boxed{-1}$$

מכפלת השיפועים שווה ל- (1-) לכן הישרים מאונכים זה לזה!

(ג) (א) נתונה הפונקציה $g(x)=-f(-x)$ המוגדרת בתחום $x<0$.

$$-4\le x\le -1$$

מכיוון שכפלנו את כל ערכי הy ב- (1-) הכפלנו את הפונקציה ומכיוון שכפלנו את כל ערכי הx ב- (1-) הכפלנו גם את כל ערכי הx לצד השלילי ומה שמעניין קרה זה שכל הפונקציה הועתקה לרביע השלישי ולכן הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים לא השתנתה אלא רק הפכה את סימניה ולכן הנקודה הקרובה ביותר לראשית הצירים של הפונקציה $g(x)$ תהיה $(-2,-2\sqrt{3})$.

(ה) ב) מכיוון ש- $g(x)$ היא אותה הפונקציה כמו $f(x)$ רק הפוכה ונמצאת בהיקף השלישי נוכל להיעזר בפונקציית המטרה המקורית על מנת למצוא את הנקודה בעלת המרחק המקסימלי ולאחר מכן נהפוך את הנגזרות:

$$f'(t) = \frac{t^3 - 8}{t^2\sqrt{t^2 + \frac{16}{t}}} \rightarrow \quad 1 \le t \le 4$$

x	1	$1\frac{1}{2}$	2	3	4
y'		$-$	0	$+$	
y	Max קצה	$\searrow$	Min	$\nearrow$	Max קצה

התקבלו שני ערכים מקסימליים ולכן נחפש את המקסימום המוחלט:

$$f(t=1) = \sqrt{17} \qquad f(t=4) = \sqrt{20}$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

$$(1, \sqrt{17}) \qquad (4, \sqrt{20})$$

המרחק של הנקודה שבה $x=4$ הוא הכי גדול לכן הוא המקסימום המוחלט לכן הנקודה על הפונקציה $g(x)$ בתחום הנתון הרחוקה ביותר מהאשית הצירים תהיה:

$$\boxed{(-4, -2)}$$