שאלה 2:

b_n סדרה אינסופית עולה שמנתה r.

נתונים:

a_n סדרה אינסופית שמנתה q - $0<q<1$

$0<a_1$

$b_1=a_6$

הסדרה c_n מוגדרת כך: $c_n=\frac{a_{n+5}}{b_n}$

(א) הסדרה a_n היא סדרה שהאיבר הראשון שלה הוא חיובי ומנתה גם כן חיובית לכן כל האיברים בסדרה הם חיוביים בהכרח.
לפי הנתונים הסדרה b_n היא סדרה עולה ולכן ניתן לומר בוודאות שמנתה גדולה מ-1 ומכיוון שאיברה הראשון הוא חיובי לפי הנתונים ($b_1=a_6$) ניתן לומר בוודאות שכל איבריה חיוביים.
איברי הסדרה c_n מורכבים משבר שבמונה שלו יש איבר מהסדרה a_n שהוא בהכרח חיובי ובמונה יש איבר מהסדרה b_n שהוא בהכרח חיובי לכן החלוקה ביניהם תמיד תיתן מספר חיובי לכן כל איברי הסדרה c_n הם חיוביים בהכרח!

(ב) על מנת להוכיח שהסדרה c_n היא סדרה הנדסית נבצע חלוקה בין האיבר הבא לאיבר הקודם בהצגה כללית ונוכיח שיתקבל מספר קבוע שאינו תלוי ב-n:

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = \frac{\frac{a_{n+6}}{b_{n+1}}}{\frac{a_{n+5}}{b_n}} = \frac{\frac{a_1 q^{n+5}}{b_1 r^n}}{\frac{a_1 q^{n+4}}{b_1 r^{n-1}}} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \frac{\cancel{a_1} q^{n+5}}{\cancel{b_1} r^n} \cdot \frac{\cancel{b_1} r^{n-1}}{\cancel{a_1} q^{n+4}} = \frac{q^{n+5} \cdot r^{n-1}}{q^{n+4} \cdot r^n} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^{n+5-(n+4)} \cdot r^{\cancel{n}-1-\cancel{n}} = q^{\cancel{n}+5-\cancel{n}-4} \cdot r^{-1} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow q^1 \cdot \frac{1}{r} = \boxed{\frac{q}{r}}$$

התקבל מספר קבוע שאינו תלוי ב-n ולכן הסדרה c_n היא סדרה הנדסית שמנתה היא $\frac{q}{r}$!

ב) המשך:

$$c_n = \frac{a_{n+5}}{b_n} \to c_1 = \frac{a_6}{b_1} \to$$

נזכיר את הנתון: $b_1 = a_6$

$$c_1 = \frac{\cancel{a_6}}{\cancel{a_6}} \Rightarrow \boxed{c_1 = 1}$$

האיבר הראשון של הסדרה c_n הוא 1!

ג) 1) מנת הסדרה c_n היא $\frac{q}{r}$ ומכיוון ש- $0<q<1$ ו- $1<r$ ניתן לומר בוודאות שהמונה חיובי וגם המכנה חיובי לכן המנה $\frac{q}{r}$ תהיה חיובית בהכרח ולפי אותם נתונים ניתן לומר בוודאות שהמונה תמיד קטן יותר מהמכנה לכן המנה תייצג שבר שהוא בהכרח קטן מ-1 והיא גם בהכרח חיובית ולכן המנה $\frac{q}{r}$ בהכרח נמצאת בין 0 ל-1!

(ג) ② נתונים:

* סכום הסדרה C_n הוא $\frac{6}{5}$.

* $\frac{b_2}{a_8} = 18$.

נעבוד עם הנתון השני:

$$\frac{b_2}{a_8} = 18 \Rightarrow \frac{\cancel{b_1}\cdot r}{\cancel{a_6}\cdot q^2} = 18 \Rightarrow \boxed{\frac{r}{q^2} = 18}$$

משוואה
ראשונה!

נעבוד עם הנתון הראשון - סכום הסדרה C_n - מנת הסדרה היא בין 0 ל-1 והיא מורכבת מחילוק בין איברים של שתי סדרות אינסופיות לכן ניתן לומר בוודאות שהסדרה C_n גם היא סדרה אינסופית לכן נשתמש בנוסחת סכום של סדרה הנדסית אינסופית:

$$\frac{C_1}{1-\frac{q}{r}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{1}{\frac{r-q}{r}} = \frac{6}{5} \Rightarrow \frac{r}{r-q} = \frac{6}{5} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow 5r = 6(r-q) \Rightarrow 5r = 6r - 6q \;/+6q\;/-5r \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{1r = 6q}$$

נציב את
הביטוי
במשוואה
הראשונה!

משוואה
שניה!

(ג) ② המשך:

(I) $r = 6q$ (II) $\frac{r}{q^2} = 18$

$\frac{6\cancel{q}}{q^{\cancel{2}}} = \cancel{18}^{3} \; /:6 \Rightarrow \frac{1}{q} = 3 \; /\cdot q \Rightarrow$

מותר לצמצם q מכיוון ש- $0<q<1$!

$\Rightarrow 1 = 3q \; /:3 \Rightarrow$

$\Rightarrow \boxed{q = \frac{1}{3}}$

$r = 6q \Rightarrow r = \cancel{6}^{2} \cdot \frac{1}{\cancel{3}} \Rightarrow \boxed{r = 2}$