7

$$f(x) = 2\sin^2(x) - 1$$

אסתמך על הכהות:

$$\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x) \quad / \cdot(-1)$$

$$\boxed{-\cos(2x) = 2\sin^2(x) - 1}$$

ואתלף את הפונקציה:

$$f(x) = -\cos(2x)$$

$$-\pi \le x \le \pi$$

(א) (1) תנאי שפונקציה תהיה זוגית ← $f(-x) = f(x)$,

נציב:

$$f(-x) = -\cos(2\cdot(-x)) = -\cos(-2x) = -\cos(2x) = \boxed{f(x)}$$

נסתמך על הכהות:

$$\cos(-x) = \cos(x)$$

הוכחנו ש- $f(-x) = f(x)$ ולכן הפונקציה $f(x)$ היא זוגית!

(ב) (1) חיתוך עם ציר ה-y: נציב: $x=0$:

$$f(x=0) = -\cos(2\cdot 0) = -\cos(0) = \boxed{-1}$$

$$\boxed{(0,-1)}$$

(א) ② המשך: חיתוך עם ציר ה-X: נציב: $y=0$:

$$-\cos(2x)=0 \quad /\cdot(-1)$$

$$\cos(2x)=0 \quad /\cos^{-1}$$

$$2x=\frac{\pi}{2}+\pi k \quad /:2 \rightarrow$$

$$x=\frac{\pi}{4}+\frac{\pi k}{2}$$

כיהות מקודרת כאשר $\cos(2)=0$

נציב:

k	x
0	$\frac{\pi}{4}$ ✓
1	$\frac{3\pi}{4}$ ✓
-1	$-\frac{\pi}{4}$ ✓
2	$\frac{5\pi}{4}$ ✗
-2	$-\frac{3\pi}{4}$ ✓

נקודות החיתוך בתחום יהיו:

$$\left(-\frac{3\pi}{4},0\right),\left(-\frac{\pi}{4},0\right),\left(\frac{3\pi}{4},0\right),\left(\frac{\pi}{4},0\right)$$

$$(0,-1)$$

(א) ③ על מנת למצוא את נקודות הקיצון של הפונקציה נגזור את הפונקציה ונשווה ל-0:

$$f(x) = -\cos(2x)$$

$$f'(x) = -(-\sin(2x)\cdot 2) \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \boxed{f'(x) = 2\sin(2x)}$$

נשווה ל-0:

$$2\sin(2x) = 0 \quad /:2$$

$$\sin(2x) = 0 \quad / \sin^{-1}$$

$$2x = \pi k \quad /:2 \rightarrow$$

$$x = \frac{\pi k}{2}$$

כהות מקוצרת כאשר $\sin(2) = 0$

נציב:

k	x
0	0 ✓
1	$\frac{\pi}{2}$ ✓
-1	$-\frac{\pi}{2}$ ✓
2	π ✓
-2	$-\pi$ ✓

(יא) 3 המשך:

על מנת למצוא את סוגי הקיצון נערכה הטבלה:

x	$-\pi$	$-\frac{3\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{4}$	0	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{3\pi}{4}$	π
y'		$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	
y	Min קצה	↗	Max	↘	Min	↗	Max	↘	Min קצה

$$f'(x) = 2\sin(2x) \Rightarrow \quad f'(x=\tfrac{\pi}{4}) = \boxed{+}$$

$$f'(x=\tfrac{3\pi}{4}) = \boxed{-}$$

$$f'(x=-\tfrac{\pi}{4}) = \boxed{-}$$

$$f'(x=-\tfrac{3\pi}{4}) = \boxed{+}$$

נקודות הקיצון שהתקבלו:

$(-\pi, -1) \rightarrow$ מינימום

$(\pi, -1) \rightarrow$ מינימום

$(-\frac{\pi}{2}, 1) \rightarrow$ מקסימום

$(\frac{\pi}{2}, 1) \rightarrow$ מקסימום

$(0, -1) \rightarrow$ מינימום

(ב) ②

$$g(x) = \frac{\cos(2x)(1-\sin(x))}{\sin(x)-1}$$

$$g(x) = \frac{\cos(2x)\cancel{(1-\sin(x))}}{-\cancel{(1-\sin(x))}}$$

$$g(x) = -\cos(2x)$$

הגענו לאותה הפונקציה אך מכיוון שמילקנו ואסור לחלק באפס ניתן לומר בוודאות ש- $f(x)=g(x)$ בתחום ההגדרה רוף מהמקרה בו $x=\frac{\pi}{2}$

לכן ערכי x עבורם $f(x)=g(x)$ הם:

$$\boxed{-\pi \le x \le \pi \quad \text{ואם} \quad x \ne \frac{\pi}{2}}$$

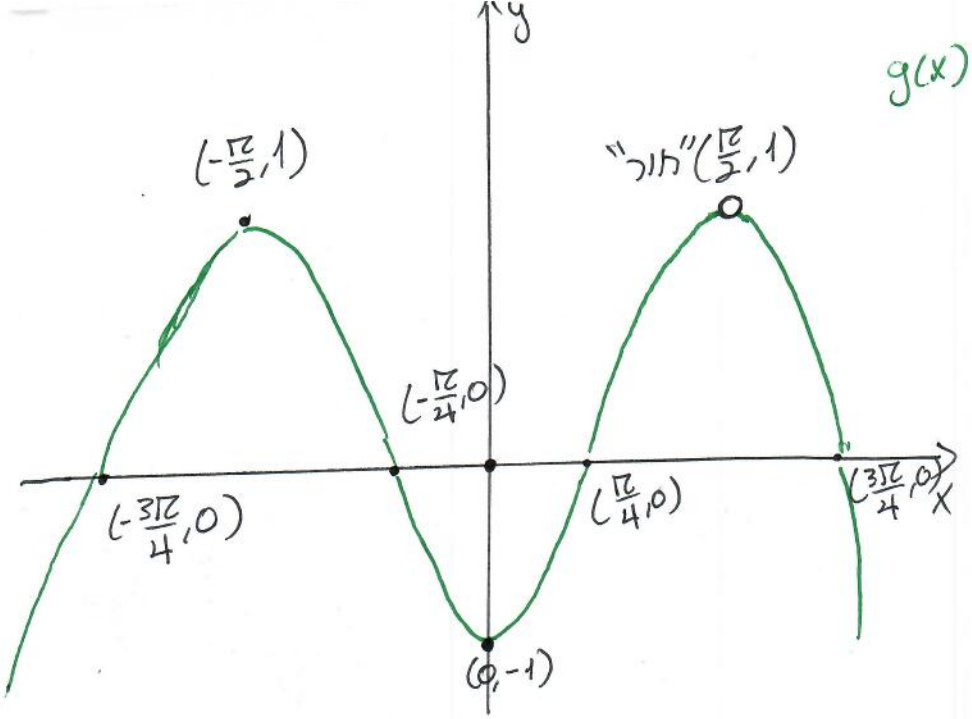
(ג) ③ מכיוון שהפונקציה $g(x)$ התקבלה לאחר צמצום קיים חשד ל"חור" בערך המאפס גם את המונה ואם את המכנה ומצאנו שהערך המאפס את המכנה בסעיף ב' הוא $x=\frac{\pi}{2}$ לכן נציב את ערך ה- x בפונקציה $g(x)$ לאחר הצמצום:

$$g(x=\frac{\pi}{2}) = -\cos(2\cdot\frac{\pi}{2}) = \boxed{1}$$

התקבל ערך y לאחר הצמצום

וההצבה לכן כה ערך ה- y של ה"חור" ולכן אין אסימפטוטה

(4) (ג)



(ד) נתונה הפונקציה $h(x) = -f(x) + b$ שתחום הגדרתה כמה לתחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$. ← $\boxed{-\pi \le x \le \pi}$

נתון:

$$\int_{-\pi}^{0} (h(x))\,dx = \frac{3\pi}{2}$$

$$h(x) = -(-\cos(2x)) + b = \boxed{\cos(2x) + b}$$

$$\int_{-\pi}^{0} (\cos(2x) + b)\,dx = \Big|_{-\pi}^{0} \frac{\sin(2x)}{2} + bx \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \cancel{\frac{\sin(2\cdot 0)}{2}}^{0} + \cancel{b\cdot 0}^{0} - \left(\cancel{\frac{\sin(-2\pi)}{2}}^{0} - b\cdot\pi\right) = \frac{3\pi}{2} \Rightarrow$$

$$\Rightarrow b\cdot\pi = \frac{3\pi}{2} \;/:\pi \Rightarrow \boxed{b = \frac{3}{2}}$$