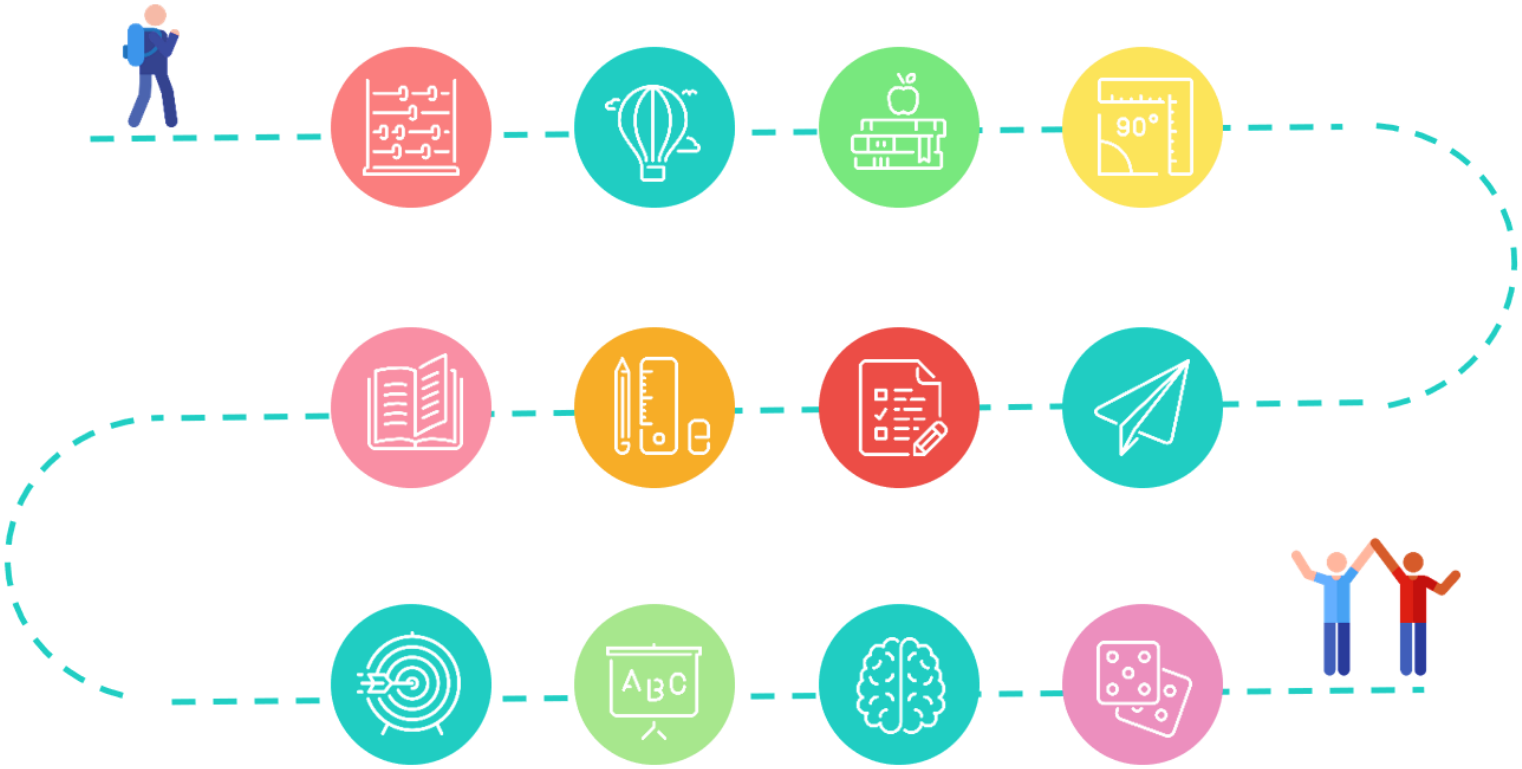
סדרות



SIMPLEX

שאלה 2

נתונה סדרה הנדסית אין־סופית יורדת: $a_1 , a_2 , a_3 , a_4 , \ldots$

סכום כל איברי הסדרה בלי האיבר הראשון הוא 6 .

מחליפים את הסימנים של כל האיברים הנמצאים במקומות הזוגיים בסדרה,

ומתקבלת סדרה הנדסית חדשה: $a_1 , -a_2 , a_3 , -a_4 , \ldots$

סכום כל איברי הסדרה החדשה בלי האיבר הראשון הוא -3 .

מהאיברים של הסדרה הנתונה בנו סדרה שלישית: $\frac{1}{a_2} , \frac{1}{a_3} , \frac{1}{a_4} , \ldots$

א. הוכח כי הסדרה השלישית היא סדרה הנדסית.

ב. נתון כי סכום n האיברים הראשונים בסדרה השלישית הוא 273.25 .

מצא את n .

א. נסמן ב־ q את מנת הסדרה הנתונה.

האיבר במקום $n+1$ בסדרה השלישית הוא:

$$\frac{1}{a_{n+1}} = \frac{1}{a_n q}$$

$$\Downarrow$$

לכן, מנת הסדרה השלישית היא:

$$\frac{a_n}{a_{n+1}} = \frac{1}{q}$$

$$\Downarrow$$

מנת הסדרה השלישית קבועה, לכן: הסדרה הנדסית

ב. סכום כל איברי הסדרה הנתונה, בלי האיבר הראשון, מקיים: $\frac{a_2}{1-q}=6$ I.

מנת הסדרה החדשה היא $-q$,

לכן סכום כל איברי הסדרה החדשה, בלי האיבר הראשון, מקיים: $\frac{-a_2}{1+q}=-3$ II.

מ־I ו־II מקבלים: $3(1+q)=6(1-q)$

$$\Downarrow$$

$$q=\frac{1}{3}$$

מהצבת $q=\frac{1}{3}$ ב־I או ב־II מקבלים: $a_2=4$

מצאנו כי מנת הסדרה השלישית היא: $\frac{1}{q}$

לכן, סכום n האיברים הראשונים

בסדרה השלישית מקיים:

$$\frac{\frac{1}{4}(3^n-1)}{3-1}=273.25$$

$$\Downarrow$$

$$3^n=2187$$

$$\Downarrow$$

$$n=7$$

SIMPLEX

שאלה 2

נתונה סדרה חשבונית: $a_1 \ , \ a_2 \ , \ a_3 \ , \ldots$

שלושה איברים עוקבים בסדרה, $a_n \ , \ a_{n+1} \ , \ a_{n+2}$, מקיימים:

$$a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$$

$$a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$$

א. מצא את האיבר a_n .

ב. לקחו חלק מהאיברים בסדרה הנתונה ובנו סדרה חשבונית חדשה:

$$a_5 \ , \ a_9 \ , \ a_{13} \ , \ \ldots \ , \ a_{4k+1}$$

סכום כל האיברים בסדרה החדשה הוא 450 .

האיבר הראשון בסדרה הנתונה בפתיח הוא $a_1 = -21$.

מצא את הערך של k .

א. לפי הנתון: $a_{n+2}^2 - a_n^2 = 216$

$$\Downarrow$$

$$(a_{n+2} - a_n)\cdot(a_{n+2} + a_n) = 216$$

$$\Downarrow$$

נציב $a_{n+2} - a_n = 2d$ ו־ $a_{n+2} = a_n + 2d$, ונקבל: $2d(2a_n + 2d) = 216$

$$\Downarrow$$

I. $d(a_n + d) = 54$

לפי הנתון: $a_n + a_{n+1} + a_{n+2} = 54$

$$\Downarrow$$

$$a_n + a_n + d + a_n + 2d = 54$$

$$\Downarrow$$

II. $a_n + d = 18$

מ־ I ו־ II מקבלים: $a_n = 15\ ,\ d = 3$

המשך תשובה לשאלה 2.

ב. הפרש הסדרה החדשה הוא: $a_9 - a_5 = a_1 + 8d - (a_1 + 4d) = 4d$

מצאנו כי $d = 3$, לכן הפרש הסדרה החדשה הוא: 12

k מציין את מספר האיברים N בסדרה החדשה, כי: $4k + 1 = 5 + 4(N - 1) \Rightarrow k = N$

לכן סכום k האיברים בסדרה החדשה מקיים: $450 = \frac{k}{2}(2 \cdot a_5 + 12(k - 1))$

האיבר החמישי בסדרה הנתונה הוא: $a_5 = -21 + 3(5 - 1) = -9$

מכאן: $450 = \frac{k}{2}(-2 \cdot 9 + 12(k - 1))$

$\Downarrow$

$k = 10$

SIMPLEX