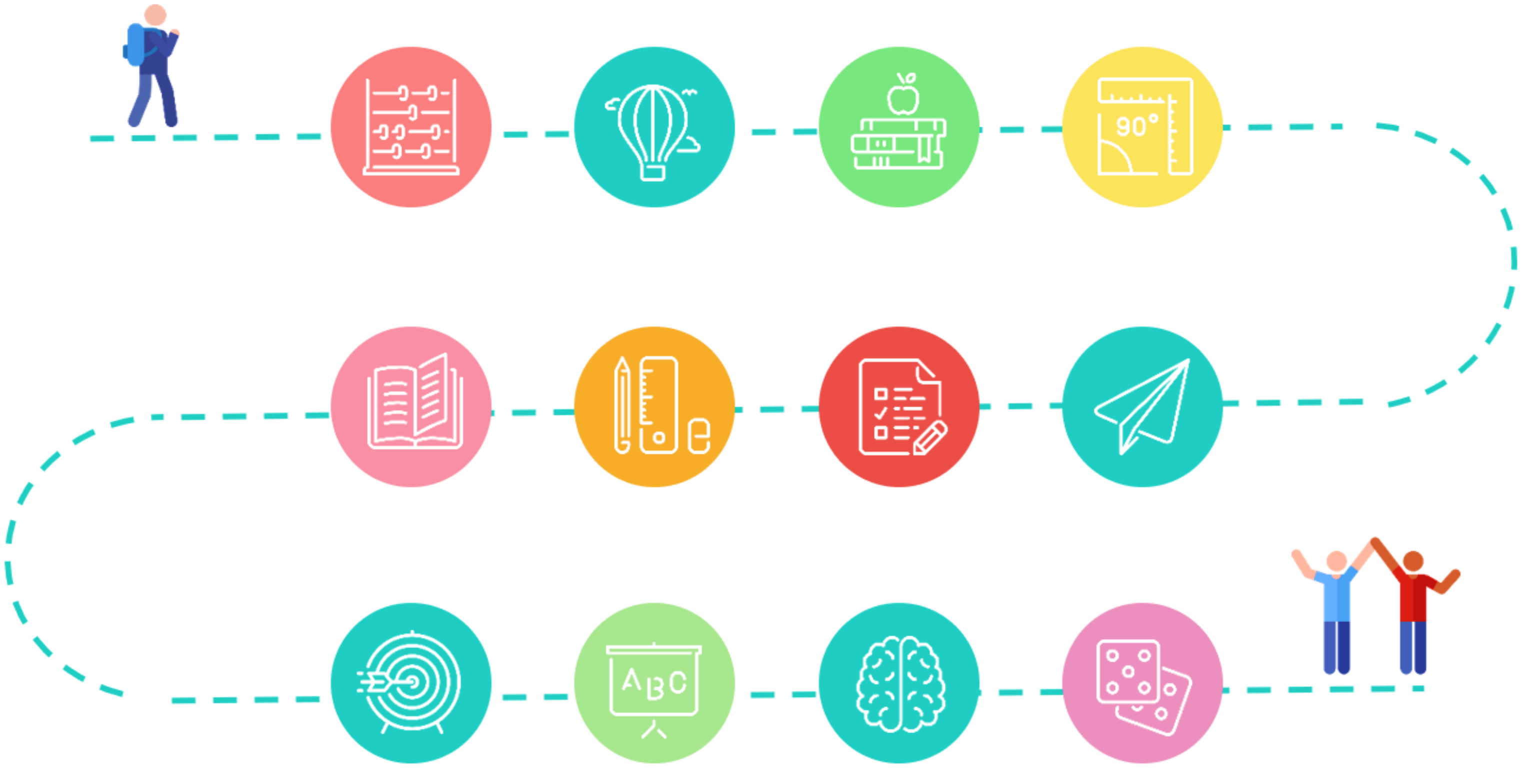
מספרים מרוכבים



SIMPLEX

הצגה אלגברית

$z = a + bi$, כאשר z הוא המספר המרוכב והוא בנוי מחלק ממשי (a) וחלק מדומה (bi).

המספר הצמוד : המספר הצמוד למספר מרוכב, z , (הרחבה בהמשך) מסומן כך- $\bar{z}$, והוא שווה לz בשינוי הסימן של האיבר המדומה- $\bar{z} = a - bi$.

כמו כן, לכל Z, מתקיים :

$$z + \bar{z} = 2a$$
$$z - \bar{z} = 2b$$

הגודל של המספר המרוכב

כאשר המספר המרוכב בערך מוחלט, מדברים על הגודל של המספר המרוכב, שהוא כמובן r ומתקיים : $|z| = |\bar{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$ (ניתן לראות בקלות את קיום המשוואה באיור למטה) .

SIMPLEX

פעולות חשבון ומשוואות במספרים מרוכבים

במשוואה עם מספרים מרוכבים, נשווה את האיברים הממשיים לחוד ואת האיברים המדומים לחוד.

לדוגמא

נתונה המשוואה $z+2\bar{z}=2i$, מצא את z .

כפל: כופלים את כל מה שצריך (כולל מדומים במרוכבים) ורק לאחר מכן מפרידים את הממשיים והמדומים.

לדוגמא : $(a+ib)(2a+3ib)=2a^2+3iba+2abi+3i^2b^2=2a^2+5abi-3b^2$.

חילוק: אם יש ביטוי מהצורה $\frac{z_1}{z_2}$ אז מומלץ להכפיל בצמוד של המכנה בצורה הזו : $\frac{z_1}{z_2}\cdot\frac{\bar{z}_2}{\bar{z}_2}$ ועל ידי פעולה זו, ניפטר מהחלק המדומה במכנה .

SIMPLEX

הצגה טריגונומטרית (הצגה קוטבית)

המספר המרוכב הוא וקטור, ולכן יש לו גודל וזווית .

הסימון הטריגונומטרי של המספר המרוכב הוא : $z = R(\cos\theta + i\sin\theta) = Rcis\theta$.

כך שR הוא הגודל של המספר המרוכב, ו- θ היא הזווית של הוקטור. (נמצאת בין הR לבין ציר x).

פעולות חשבון

נסמן $z_1 = R_1 cis\theta, z_2 = R_2 cis\alpha$

בחיבור וחיסור מפרידים לאיברים ממשיים ומדומים.

בכפל וחילוק :

$$z_1 z_2 = R_1 R_2 cis(\alpha + \theta)$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{R_1}{R_2} cis(\theta - \alpha) .$$

המספר הצמוד של Z1 הוא : $\bar{z} = Rcis(-\theta)$

<u>מעבר מהצגה קרטזית להצגה קוטבית באמצעות צמד הנוסחאות</u>: $R=\sqrt{x^2+y^2}\quad , \quad tg\theta=\frac{y}{x}$

<u>חשוב מאד</u>: המחשבון נותן זוית אחת המתאימה לtng, אולם יש אחת נוספת במרחק 180^{o}. עלינו להסתכל על מיקום הנקודה (איזה רביע היא נמצאת) ולפי זה להחליט מה הזוית המתאימה למספר המרוכב הנ״ל.

* היתרון בכתיבה הקוטבית של המספר המרוכב הוא הנוחות בחישוב כפל, חילוק ובעיקר **חזקות**:

בהנתן 2 מספרים מורכבים: $Z_1=x_1+iy_1=R_1(\cos\theta_1+i\sin\theta_1)\quad , \quad Z_2=x_2+iy_2=R_2(\cos\theta_2+i\sin\theta_2)$

$$Z_1\cdot Z_2=R_1\cdot R_2\left[\cos(\theta_1+\theta_2)+i\sin(\theta_1+\theta_2)\right]$$

$$\frac{Z_1}{Z_2}=\frac{R_1}{R_2}\left[\cos(\theta_1-\theta_2)+i\sin(\theta_1-\theta_2)\right]$$

*<u>**משפט דה-מואבר :** (משפט המאפשר לחשב בקלות *חזקות* של מספר מורכב):</u>

בהנתן המספר המרוכב $Z = r[\cos\theta + i\sin\theta]$ אז מתקיים $Z^n = R^n[\cos(n\cdot\theta) + i\sin(n\cdot\theta)]$

<u>שורשים מסדר n של מספר מרוכב</u>

בהינתן המספר המרוכב $r(\cos\theta + i\sin\theta)$, ואנו רוצים למצוא את n הפתרונות המקיימים : $Z^n = r[\cos\theta + i\sin\theta]$

נשתמש בנוסחה לחישוב n השורשים ה n -ים השונים :

(מציבים כל פעם k אחר) $k = 0,1,2,\ldots,n-1$ $$Z_k = \sqrt[n]{r}\left[\cos\left(\frac{\theta + 360k}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\theta + 360k}{n}\right)\right]$$

המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z מקיים: $|z-12-5i|=7$.

המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים $w=x+iy$ מקיים: $\arg(w)=45^{\circ}$.

($\arg(w)$ היא הזווית בהצגה הקוטבית של w .)

המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w חותך את המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים z בנקודות B ו־ C .

א. סרטט באותה מערכת צירים סקיצות של שני המקומות הגאומטריים.

ב. הנקודות B ו־ C מייצגות במישור גאוס את המספרים המרוכבים z_1 ו־ z_2 בהתאמה.

מצא את $\arg(z_2 \cdot z_1)$.

לפי הנתון המקום הגאומטרי של

המספרים $z = x + iy$ מקיים:

$$\left| x - 12 + (y-5)i \right| = 7$$

$$\Downarrow$$

לפי ההגדרה של הערך המוחלט:

$$\sqrt{(x-12)^2 + (y-5)^2} = 7$$

$$\Downarrow$$

$$(x-12)^2 + (y-5)^2 = 49$$

$$\Downarrow$$

המקום הגאומטרי של המספרים z

הוא מעגל שמרכזו $(12\ ,\ 5)$ ורדיוסו 7

SIMPLEX

לפי הנתון המספרים $w = x + iy$ יוצרים עם הכיוון החיובי של ציר ה־ x זווית של 45^o ומקיימים:

$$tg45^o = \frac{y}{x} \quad x > 0 \ , \ y > 0$$

$$\Downarrow$$

$$1 = \frac{y}{x}$$

$$\Downarrow$$

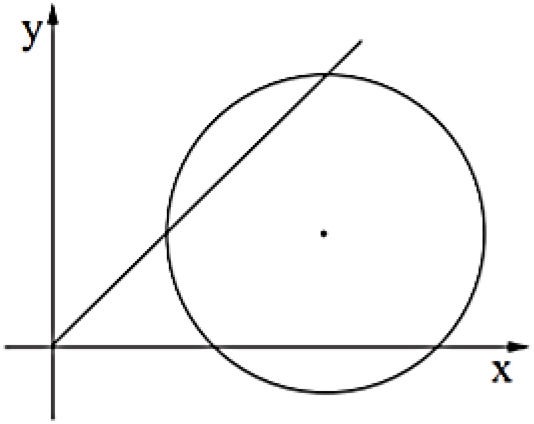
$$y = x$$

$$\Downarrow$$

המקום הגאומטרי של המספרים w

הוא ישר ברביע הראשון

מכאן:



SIMPLEX

הארגומנט של B הוא 45^o והארגומנט של C הוא 45^o (נמצאים על המקום הגאומטרי)

$$\Downarrow$$

$$z_1 = R_1 cis\, 45^o \quad , \quad z_2 = R_2 cis\, 45^o$$

$$\Downarrow$$

$$z_1 \cdot z_2 = R_1 \cdot R_2 cis(45^o + 45^o)$$

$$\Downarrow$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = 45^o + 45^o$$

$$\Downarrow$$

$$\arg(z_1 \cdot z_2) = 90^o$$

SIMPLEX

א. פתור את המשוואה: $\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4=1$, z הוא מספר מרוכב.

ב. האם שלושה מן הפתרונות שמצאת בסעיף א נמצאים על המקום הגאומטרי של המספרים המרוכבים w השונים מ־ 0 ומקיימים: $107^o<\arg(w)<253^o$? נמק.

א. נסמן: $\cos\alpha + i\sin\alpha = cis\alpha$, ונקבל:

$$\left(\frac{2z+1}{z-1}\right)^4 = 1 = cis(0^o + 360^o k)$$, k שלם

$$\Downarrow$$

$$\frac{2z+1}{z-1} = cis(90^o k) \ , \ k = 0, 1, 2, 3$$

$$\Downarrow$$

$$\frac{2z_0+1}{z_0-1} = cis0^o = 1 \ , \ \frac{2z_1+1}{z_1-1} = cis90^o = i \ , \ \frac{2z_2+1}{z_2-1} = cis180^o = -1 \ , \ \frac{2z_3+1}{z_3-1} = cis270^o = -i$$

$$\Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow \quad \Downarrow$$

$$z_0 = -2 \ , \ z_1 = -\frac{1}{5} - \frac{3}{5}i \ , \ z_2 = 0 \ , \ z_3 = -\frac{1}{5} + \frac{3}{5}i$$

ב. הזוויות, שיוצרים המספרים z_0 , z_1 , z_3 השונים מ־ 0

עם הכיוון החיובי של ציר ה־ x , מקיימות:

$$tg\alpha_0 = \frac{0}{-2} = 0 \quad , \quad tg\alpha_1 = \frac{-\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}} = 3 \quad , \quad tg\alpha_3 = \frac{\frac{3}{5}}{-\frac{1}{5}} = -3$$

$$\Downarrow \qquad\qquad \Downarrow \qquad\qquad \Downarrow$$

לפי שיעורי ה־ x וה־ y של המספרים:

z_1 ברביע השלישי, z_3 ברביע השני

ו־ z_0 נמצא בחלק השלילי של ציר ה־ x , לכן:

$$\arg(z_0) = 180^o \quad , \quad \arg(z_1) = 251.56^o \quad , \quad \arg(z_3) = 108.43^o$$

$$\Downarrow$$

z_0 , z_1 , z_3 על המקום הגאומטרי

של המספרים המקיימים $107^o < \arg(w) < 253^o$

SIMPLEX