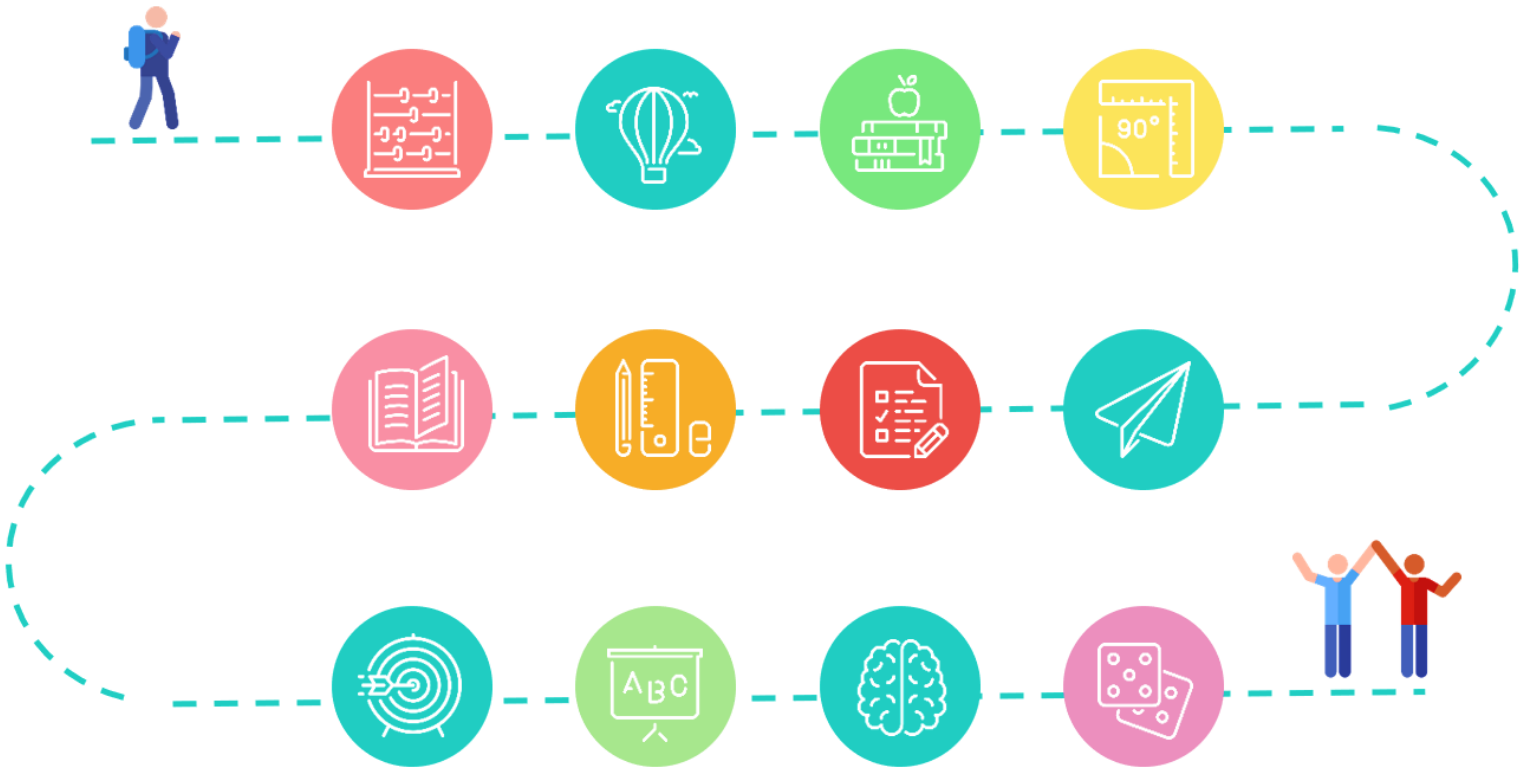
חקירת שורש



SIMPLEX

שאלה 6

נתונות שתי פונקציות: $f(x) = x\sqrt{8 - x^2}$

$$g(x) = \sqrt{8x^2 - x^4}$$

א. (1) לשתי הפונקציות יש אותו תחום הגדרה.

מצא את תחום ההגדרה.

(2) מצא את נקודות החיתוך של כל אחת מהפונקציות $f(x)$ ו־ $g(x)$ עם הצירים.

ב. מצא את השיעורים של נקודות הקיצון המוחלט של כל אחת מהפונקציות , וקבע את סוגן.

ג. על פי הסעיפים א ו־ ב, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$,

וסרטט סקיצה של גרף הפונקציה $g(x)$.

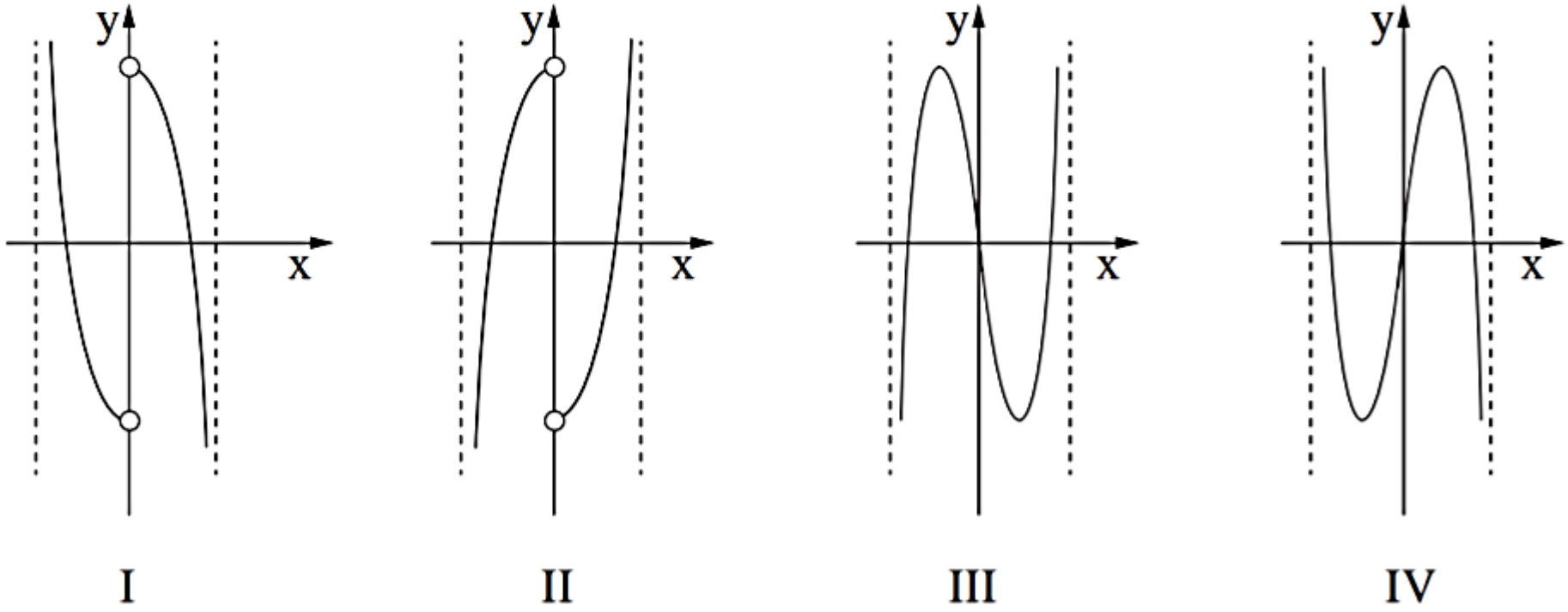
ד. לפניך ארבעה גרפים, IV-I .

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.

SIMPLEX

ד. לפניך ארבעה גרפים, I-IV .

איזה מהגרפים מתאר את פונקציית הנגזרת $g'(x)$? נמק.



SIMPLEX

א. (1) צריך להתקיים:

$$8 - x^2 \geq 0$$

$$\Downarrow$$

תחום ההגדרה של $f(x)$ ושל $g(x)$: $-2\sqrt{2} \leq x \leq 2\sqrt{2}$

(2)

$$f(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ , \quad x = \pm 2\sqrt{2}$$

$$g(x) = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 0 \ , \quad x = \pm 2\sqrt{2}$$

נקודות חיתוך עם הצירים

של $f(x)$ ושל $g(x)$: $(0\,,0) \ , \ (2\sqrt{2}\,,0) \ , \ (-2\sqrt{2}\,,0)$

SIMPLEX

ב.

$$f'(x)=\sqrt{8-x^2}+x\frac{-2x}{2\sqrt{8-x^2}}=\frac{8-2x^2}{\sqrt{8-x^2}}$$

$$g'(x)=\frac{16x-4x^3}{2\sqrt{8x^2-x^4}}=\frac{8x-2x^3}{\sqrt{8x^2-x^4}}$$

עבור $f(x)$ נקודות "חשודות" לקיצון: $8-2x^2=0 \Rightarrow x=\pm 2$

עבור $g(x)$ נקודות "חשודות" לקיצון: $8x-2x^3=0 \Rightarrow x=\pm 2\ ,\ x=0$

x	$-2\sqrt{2}$		-2		0		2		$2\sqrt{2}$
f(x)	0	↘	-4	↗	0	↗	4	↘	0
g(x)	0	↗	4	↘	0	↗	4	↘	0

SIMPLEX

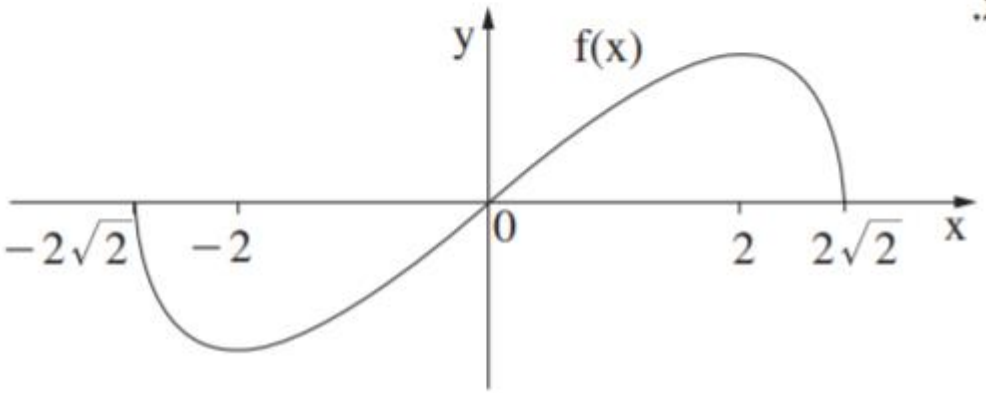
מקסימום מוחלט של $f(x)$: $(2\,,4)$

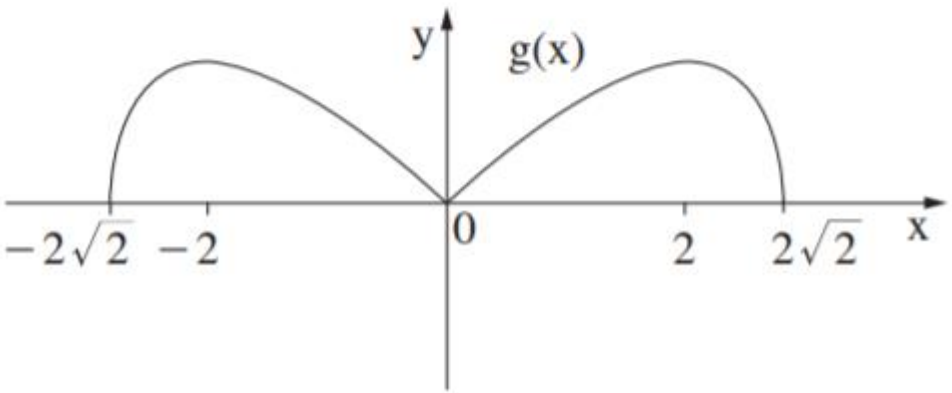
מינימום מוחלט של $f(x)$: $(-2\,,-4)$

מקסימום מוחלט של $g(x)$: $(2\,,4)\quad(-2\,,4)$

מינימום מוחלט של $g(x)$: $(-2\sqrt{2}\,,0)\quad(0\,,0)\quad(2\sqrt{2}\,,0)$

ג.





SIMPLEX

ד. $g'(x)$ אינה מוגדרת עבור $x = 0$

$\Downarrow$

גרף III וגרף IV אינם מתאימים

$g(x)$ עולה עבור $-2\sqrt{2} < x < -2$, $0 < x < 2$

$g(x)$ יורדת עבור $-2 < x < 0$, $2 < x < 2\sqrt{2}$

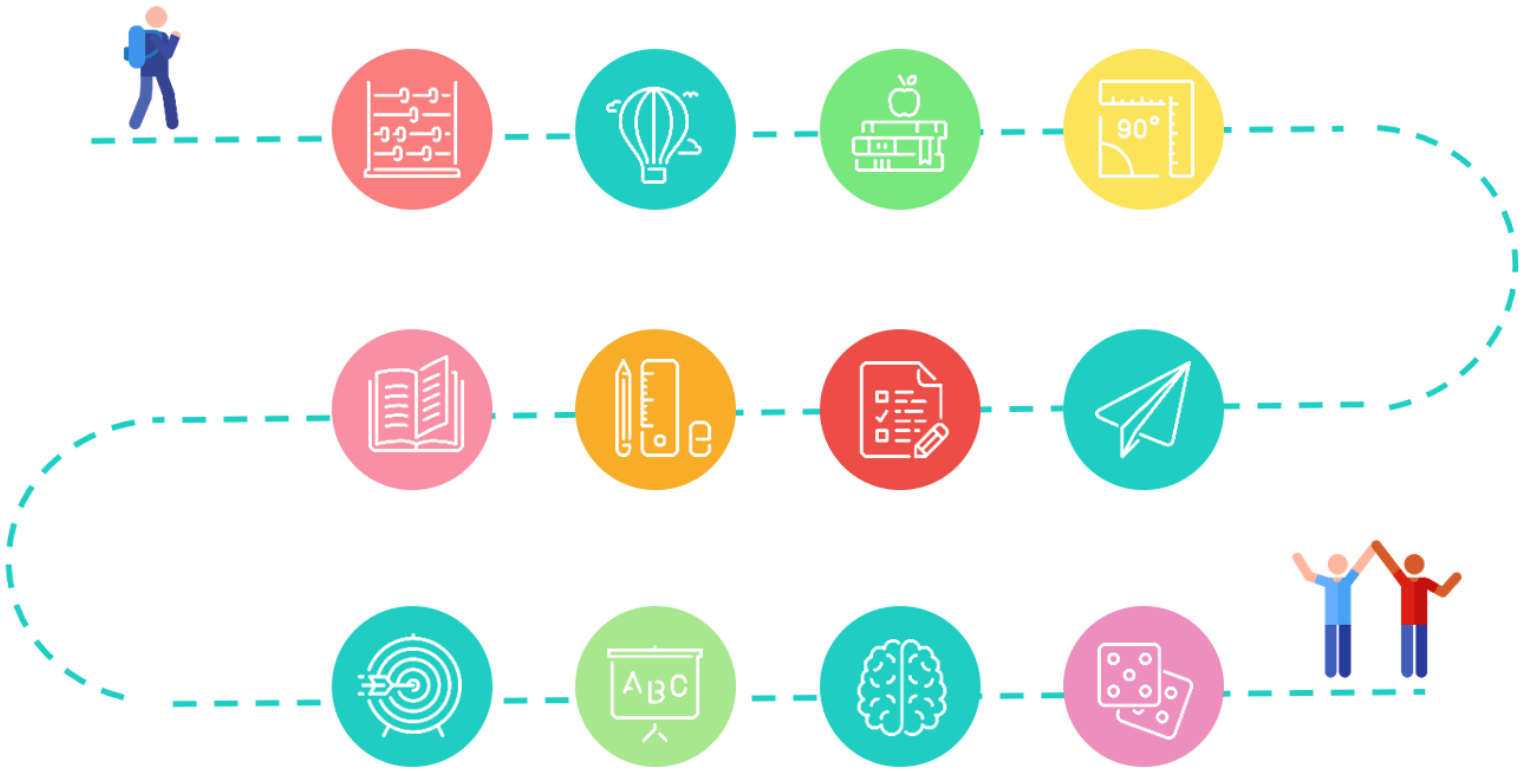
לכן: $g'(x)$ חיובית עבור $-2\sqrt{2} < x < -2$, $0 < x < 2$

$g'(x)$ שלילית עבור $-2 < x < 0$, $0 < x < 2\sqrt{2}$

מכאן: גרף I הוא הנכון

SIMPLEX

חקירת מנה



SIMPLEX

שאלה 7

נתונה הפונקציה $f(x)=\frac{(x-2)^2}{x^2-1}$.

א. (1) מצא את תחום ההגדרה של הפונקציה $f(x)$.

(2) מצא את האסימפטוטות של הפונקציה $f(x)$ המקבילות לצירים.

(3) מצא את נקודות החיתוך של גרף הפונקציה $f(x)$ עם הצירים.

(4) מצא את השיעורים של נקודות הקיצון של הפונקציה $f(x)$, וקבע את סוגן.

ב. רק על פי סעיף א, סרטט סקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$.

ג. רק על פי הסקיצה של גרף הפונקציה $f(x)$ שסרטטת, מצא את התחום שבו מתקיים:

פונקציית הנגזרת $f'(x)$ שלילית ופונקציית הנגזרת השנייה $f''(x)$ חיובית.

נמק.

SIMPLEX

א. (1) $f(x)$ מוגדרת עבור: $x^2 - 1 \neq 0$

$$\Downarrow$$

תחום ההגדרה של $f(x)$: $x \neq \pm 1$

(2) אסימפטוטות של $f(x)$

המקבילות לצירים: $y = 1 \quad , \quad x = \pm 1$

(3) נקודת חיתוך עם ציר ה־ y: $x = 0 \Rightarrow f(0) = -4 \Rightarrow (0, -4)$

נקודת חיתוך עם ציר ה־ x: $f(x) = 0 \Rightarrow (x-2) = 0 \Rightarrow x = 2 \Rightarrow (2, 0)$

(4)
$$f'(x) = \frac{2(x-2)(x^2-1) - (x-2)^2(2x)}{(x^2-1)^2}$$

$$\Downarrow$$

$$f'(x) = \frac{2(x-2)(2x-1)}{(x^2-1)^2}$$

SIMPLEX

שיעורי ה־ x של הנקודות "החשודות" לקיצון: $f'(x) = 0 \Rightarrow x = 2 \quad , \quad x = \frac{1}{2}$

הנגזרת של המונה בפונקציית הנגזרת $f'(x)$ היא: $2(4x - 5)$

הסימן של הנגזרת השנייה $f''(x)$ נקבע על פי

הסימן של נגזרת המונה של $f'(x)$

כי המכנה של $f'(x)$ חיובי לכל x , לכן: הסימן של $f''(2) = 2(4 \cdot 2 - 5) > 0$

הסימן של $f''(\frac{1}{2}) = 2(4 \cdot \frac{1}{2} - 5) < 0$

$\Downarrow$

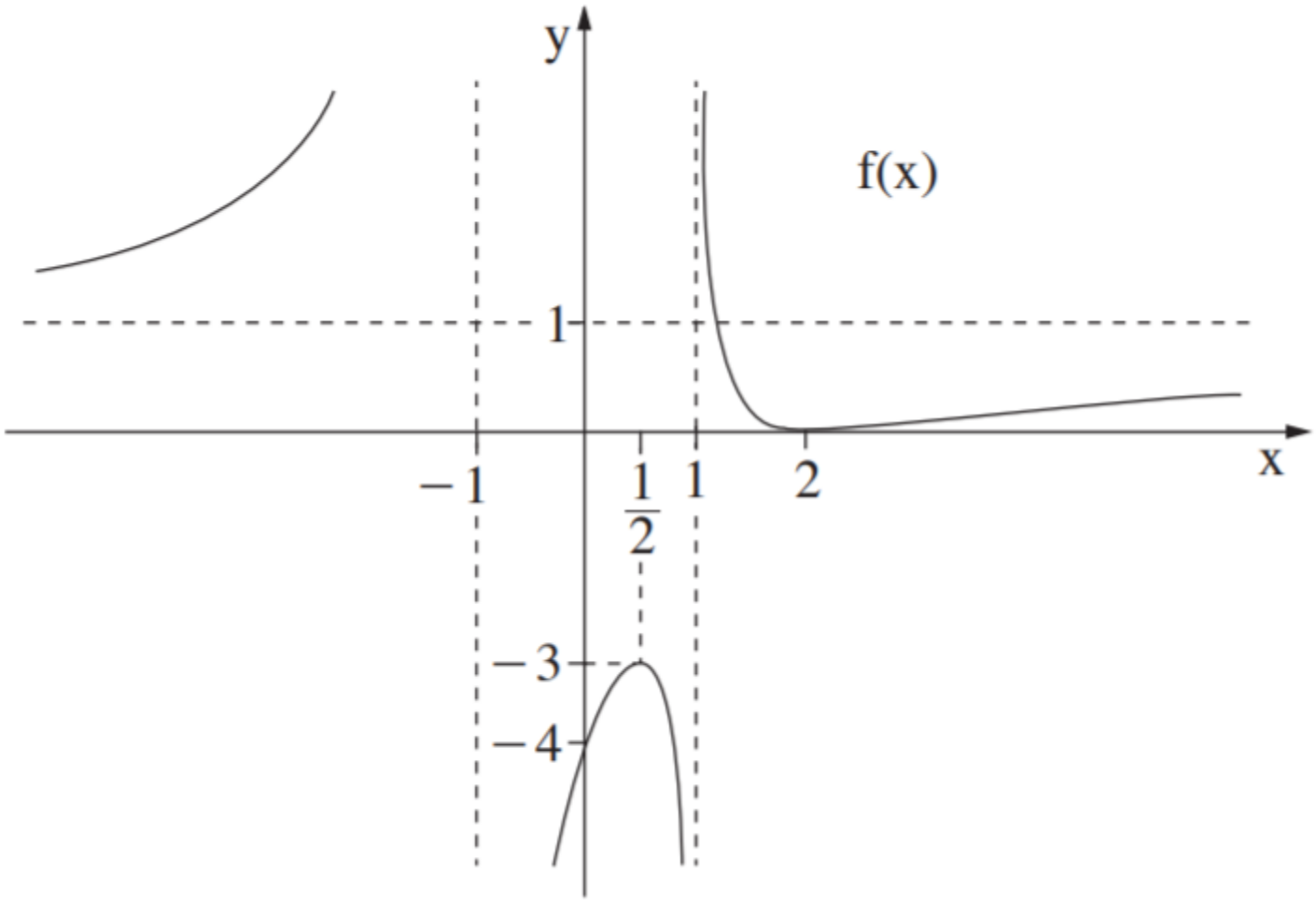
ל־ $f(x)$ מינימום ב־ $x = 2$ ומקסימום ב־ $x = \frac{1}{2}$

$\Downarrow$

נקודות הקיצון של $f(x)$ הן: מינימום ב־ $(2 , 0)$, מקסימום ב־ $\left(\frac{1}{2} , -3\right)$

SIMPLEX

ב.



SIMPLEX

ג. $f'(x) < 0$ עבור: $\frac{1}{2} < x < 1 \quad , \quad 1 < x < 2$ כי בתחום זה $f(x)$ יורדת

$\Downarrow$

בתחום $\frac{1}{2} < x < 2 \ , 1 < x < 2$

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור: $1 < x < 2$

$\Downarrow$

בתחום $\frac{1}{2} < x < 1 \quad , \quad 1 < x < 2$

$f''(x) > 0$ עבור: $1 < x < 2$

מכאן $f'(x) < 0$ ו־ $f''(x) > 0$ עבור: $1 < x < 2$

SIMPLEX

ג. $f'(x) < 0$ עבור: $\frac{1}{2} < x < 1 \quad , \quad 1 < x < 2$ כי בתחום זה $f(x)$ יורדת

$\Downarrow$

בתחום $\frac{1}{2} < x < 2 \ , 1 < x < 2$

$f(x)$ קעורה כלפי מעלה $\cup$ עבור: $1 < x < 2$

$\Downarrow$

בתחום $\frac{1}{2} < x < 1 \quad , \quad 1 < x < 2$

$f''(x) > 0$ עבור: $1 < x < 2$

מכאן $f'(x) < 0$ ו־ $f''(x) > 0$ עבור: $1 < x < 2$

SIMPLEX