וקטורים –סיכום הנושא

ישר

<u>משוואה</u> (במישור בלבד) : $ax + by + c = 0$

<u>הצגה פרמטרית</u> : (על ידי נקודה $A=(a_1,a_2,a_3)$ וכוון $\underline{b}=(b_1,b_2,b_3)$) : $l: \ \underline{x}=(a_1,a_2,a_3)+t(b_1,b_2,b_3)$

<u>הצגה פרמטרית</u> על ידי שתי נקודות $A=(a_1,a_2,a_3)$ ו- $C=(c_1,c_2,c_3)$:

מגדירים את וקטור הכוון על ידי : $\underline{b}=\underline{c}-\underline{a}=(c_1-a_1,c_2-a_2,c_3-a_3)=(b_1,b_2,b_3)$

<u>זווית בין ישרים</u> : α היא הזווית **החדה** בין וקטורי הכוון של שני הישרים : $l_1: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{b}$ ו- $l_2: \underline{x}=\underline{c}+t\underline{d}$

: $$\cos\alpha=\frac{\underline{b}\cdot\underline{d}}{|\underline{b}|\cdot|\underline{d}|}$$

דוגמא לחישוב הזווית בין הישרים : $\underline{x}=(-1,0,1)+t(2,0,1)$ ו- $\underline{x}=(2,-1,-1)+t(0,1,1)$:

$$\cos\alpha=\frac{(2,0,1)\cdot(0,1,1)}{\sqrt{5}\cdot\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{10}}\Rightarrow\alpha=71.57^\circ$$

<u>מצב הדדי בין ישרים</u> : מתלכדים, מקבילים, נחתכים, מצטלבים : $l_1: \underline{x}=\underline{a}+t\underline{b}$ ו- $l_2: \underline{x}=\underline{c}+t\underline{d}$

וקטורי כוון תלויים	לישרים יש נקודה משותפת	מסקנה : הישרים –
כן	כן	מתלכדים
	לא	מקבילים
לא	כן	נחתכים
	לא	מצטלבים

דוגמא: $l_1: \underline{x}=(-6,2,1)+t(1,2,-1)$ $\quad l_2: \underline{x}=(-8,-5,-3)+r(1,3,1)$

א. $(1,2,-1)\neq m(1,3,1)$ לכן, הישרים נחתכים או מצטלבים

ב. נפתור את המערכת : $x: \ -6+t=-8+r$; $y: \ 2+2t=-5+3r$; $z: \ -1-t=-3+r$.

נקבל : t=1 , r=3 ומכאן : x=-5 , y=4 , z=0 : הישרים נחתכים ב : (-5,4,0)

מישור

<u>משוואה</u>: $ax+by+cz+d=0$ (כאשר $\underline{u}=(a,b,c)$ הוא וקטור מאונך למישור: $\pi: \underline{x}\cdot\underline{u}+d=0$)

משוואת מישור **דרך 3 נקודות** מתקבלת מפתרון מערכת שלושת המשוואות (לפישוט מציבים: d=1), או על ידי הדטרמיננטה: (כאשר $\underline{u}=(u_1,u_2,u_3)$ ו- $\underline{v}=(v_1,v_2,v_3)$ הם וקטורי כוון של המישור, העובר דרך הנקודה $A=(a_1,a_2,a_3)$):

$$\begin{vmatrix} x-a_1 & y-a_2 & z-a_3 \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix}=0 \quad\Rightarrow\quad (u_2v_3-u_3v_2)(x-a_1)-(u_1v_3-u_3v_1)(y-a_2)+(u_1v_2-u_2v_1)(z-a_3)=0$$

<u>הצגה פרמטרית של מישור</u>: $\pi: \underline{x}=(a_1,a_2,a_3)+t(b_1-a_1,b_2-a_2,b_3-a_3)+r(c_1-a_1,c_2-a_2,c_3-a_3)$

ישר ומישור

אפשרויות: הישר - מוכל במישור; חותך את המישור; מקביל למישור. הקביעה: על פי מספר הנקודות המשותפות.

דוגמא כאשר נתונה משוואת המישור: $\pi: x-2y-6z+1=0$ והישר: $l:\underline{x}=(1,-1,-1)+t(1,0,1)$

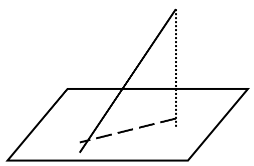
נציב במשוואת המישור את: $x=1+t,\ \ y=-1,\ \ z=-1+t$ ונקבל: $1+t-2(-1)-6(-1+t)+1=0$

נובע: t=2, לכן יש נקודת חיתוך, ובהצבת t=2 נקבל: (3,-1,1) שהיא נקודת החיתוך.

(אם למערכת אין פתרון, אזי הישר מקביל מישור. אם יש אינסוף פתרונות, אזי הישר מוכל במישור)

דוגמא כאשר נתונה הצורה הפרמטרית של משוואת המישור: $\pi: \underline{x}=(1,-1,1)+r(0,0,1)+m(3,-1,4)$ והישר: $l:\underline{x}=(2,4,-1)+t(-6,2,-7)$ נבנה מערכת של 3 משוואות: $x:\ \ 2-6t=1+3m$; $y:\ \ 4+2t=-1-m$; $z:\ \ -1-7t=1+r+4m$. למערכת אין פתרון, לכן הישר מקביל למישור.

<u>זווית בין ישר למישור</u>: מוגדרת כזווית α שבין הישר לבין היטלו על המישור.



יהי המישור: $\pi:\ \ \underline{x}\cdot\underline{u}+d=0$ והישר: $l:\underline{x}=\underline{a}+t\underline{b}$ אזי מתקיים:

$$\sin\alpha=\cos(90-\alpha)=\frac{\underline{u}\cdot\underline{b}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{b}|}$$

שני מישורים

<u>מקבילים או מתלכדים</u>: **אם** $\underline{u}=m\underline{v}$ **אז** המישורים: $\pi_1:\ \ \underline{x}\cdot\underline{u}+d=0$ ו- $\pi_2:\ \ \underline{x}\cdot\underline{v}+e=0$ הם מקבילים או מתלכדים. **אם** גם מתקיים: "נקודה שנמצאת על המישור האחד, נמצאת גם על השני" – אזי הם מתלכדים. **אם לא** – הם מקבילים.

דוגמא x+2y+z-9=0 ו- 2x+4y+2z-5=0 הם שני מישורים. מתקיים: (2,4,2) = 2 (1,2,1) לכן נבדוק נקודה: (1,2,4) נמצאת על המישור הראשון אך לא על השני. מסקנה: הם מקבילים.

דוגמא <u>מישורים נחתכים</u>: x+2y-3z+3=0 ו- 2x-y+z-4=0 הם שני מישורים נחתכים. נציב בשניהם z=0 ונקבל x=1, y=-2 . נציב בשניהם x=0 ונקבל: y=-9 ו- z=-5 . לכן, שתי נקודות משותפות הן (1,-2,0) ו- (0,-9,-5) ישר החיתוך של המישורים עובר דרכן. משוואתו: $l:\underline{x}=(1,-2,0)+t(-1,-7,-5)$

דוגמא בהצגה פרמטרית : $\pi_1 : \underline{x} = (1,2,1) + t(1,0,0) + r(1,1,0)$ וכן : $\pi_2 : \underline{x} = (0,0,1) + k(0,0,1) + m(1,0,1)$ נמצא גם כאן שתי נקודות משותפות. נרשום את 3 המשוואות : $x: \ 1+t+r=m \ , \ y: \ 2+r=0 \ , \ z: \ 1=1+k+m$. נציב t=2 ונקבל : $r=-2 \ , \ k=1 \ , \ m=-1$ והנקודה : (1,0,1). נציב גם t=0 ונקבל : $r=-2 \ , \ k=-1 \ , \ m=1$. והנקודה : (-1,0,1). ישר החיתוך יהיה, לכן : $l : \underline{x} = (1,0,1) + s(-2,0,0)$

<u>זווית בין מישורים :</u> היא הזווית **החדה** α בין שני ישרים הניצבים למישורים אלו. הם המישורים הם :

$\pi_1 : \ \underline{x}\cdot\underline{u} + d = 0$ ו- $\pi_2 : \ \underline{x}\cdot\underline{v} + e = 0$ אז מתקיים : $$\cos\alpha = \frac{\underline{u}\cdot\underline{v}}{|\underline{u}|\cdot|\underline{v}|}$$

מרחקים

<u>מרחק בין שתי נקודות :</u> זהו אורך הוקטור המחבר ביניהן : אם הנקודות $A=(a_1,a_2,a_3)$ $B=(b_1,b_2,b_3)$ אז המרחק הוא $\left|\overrightarrow{AB}\right| = \sqrt{(b_1-a_1)^2+(b_2-a_2)^2+(b_3-a_3)^2}$

<u>מרחק בין נקודה וישר :</u> אם המרחב דו-ממדי והישר נתון במשוואה $ax+by+c=0$ אז $$d = \frac{|ax_1+by_1+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

כשהישר נתון בהצגה פרמטרית : $l : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{b}$ והנקודה : $P(x_p, y_p, z_p)$ נבחר נקודה N על הישר : $N : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{b}$

ונסתכל בוקטור $\overrightarrow{PN}$: התבנית של $\left|\overrightarrow{PN}\right|$ היא פונקציה של t. נמצא t שגורם למינימום.

דוגמא $l : \underline{x} = (5,2,-3) + t(5,4,1)$ והנקודה : P(5,3,-1) . נובע : $\overrightarrow{PN} = (5t, 4t-1, t+2)$ וכן $\left|\overrightarrow{PN}\right|^2 = (5t)^2 + (4t-1)^2 + (t+2)^2 = 42t^2 - 4t + 5$. נגזור לפי t ונשווה לאפס : 0=84t-4 ומכאן t=1/21. הפונקציה היא ריבועית עם נקודת מינימום ובהצבה נקבל את המרחק : 2.21.

<u>מרחק בין ישרים מקבילים :</u> אם $l_1 : \ ax+by+c_1=0$ וכן $l_2 : \ ax+by+c_2=0$ אז $$d = \frac{|c_2-c_1|}{\sqrt{a^2+b^2}}$$

בהצגה פרמטרית : נבחר נקודה על הישר האחד ונמצא את מרחקה מהישר השני על פי "מרחק של נקודה מישר".

<u>מרחק בין נקודה למישור :</u> מוגדר כאורך האנך מן הנקודה אל המישור. $$d = \frac{|ax_1+by_1+cz_1+d|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$$

דוגמא מרחק המישור 3x+2y-z+15=0 מהראשית הוא : $d = \frac{15}{\sqrt{9+4+1}} = 4.01$

בהצגה פרמטרית : המישור הוא $\pi : \underline{x} = \underline{a} + t\underline{b} + r\underline{c}$ והנקודה : $P(x_p, y_p, z_p)$. נבחר נקודה N במישור ונמצא אותה על ידי מציאת t ו-r אשר מקיימים : $\overrightarrow{PN}\cdot\underline{b} = 0$ וגם $\overrightarrow{PN}\cdot\underline{c} = 0$

דוגמא $\pi : \underline{x} = (1,2,3) + t(-1,1,1) + r(2,1,-1)$, $P(5,2,4)$. נובע: $\overrightarrow{PN} = (1-t+2r-5, 2+t+r-2, 3+t-r-4)$

ולכן המכפלות הן: $(-t+2r-4, t+r, t-r-1)\cdot(2,1.-1) = 0$ $\quad$ $(-t+2r-4, t+r, t-r-1)\cdot(-1,1,1) = 0$

ומתקבל: $r = \frac{15}{14}$ $\quad$ $t = -\frac{2}{7}$ לכן: $\overrightarrow{PN} = (-\frac{11}{7}, \frac{11}{14}, -\frac{33}{14}) = \frac{11}{14}(-2,1,-3)$ וארכו: 2.94

<u>מרחק בין מישור לישר מקביל לו:</u> נבחר נקודה על הישר ונמצא את מרחקה מהמישור.

<u>מרחק בין מישורים מקבילים:</u> נבחר נקודה על אחד המישורים ונמצא את מרחקה מהמישור השני.

אם המישורים נתונים על ידי משוואותיהם: $\pi_1 : \underline{x}\cdot\underline{u} + d = 0$ ו- $\pi_2 : \underline{x}\cdot\underline{u} + e = 0$ אז המרחק:

$$d = \frac{|d-e|}{\sqrt{a^2+b^2+c}}$$ (כאשר $\underline{u} = (a,b,c)$)

<u>מרחק בין ישרים מצטלבים:</u> מוגדר כמרחק בין שני המישורים המקבילים העוברים דרך הישרים הללו

דוגמא הישרים המצטלבים הם: $l_1 : \underline{x} = (0,1,-3) + t(1,1,3)$, $l_2 : \underline{x} = (-3,-2,0) + k(4,-1,2)$

המישורים המקבילים: $\pi_1 : \underline{x} = (0,1,-3) + t(1,1,3) + r(4,-1,2)$ ו- $\pi_1 : \underline{x} = (-3,-2,0) + m(1,1,3) + k(4,-1,2)$

נמצא וקטור אשר מאונך לשני וקטורי הכיוון. פתרון אפשרי הוא (1,2,-1) ומשוואות המישורים יהיו לכן:

$\pi_1 : x+2y-z+7=0$ ו- $\pi_2 : x+2y-z-5=0$ ולכן המרחק: $d = \frac{5-(-7)}{\sqrt{1+4+1}} = \frac{12}{\sqrt{6}} = 4.89$