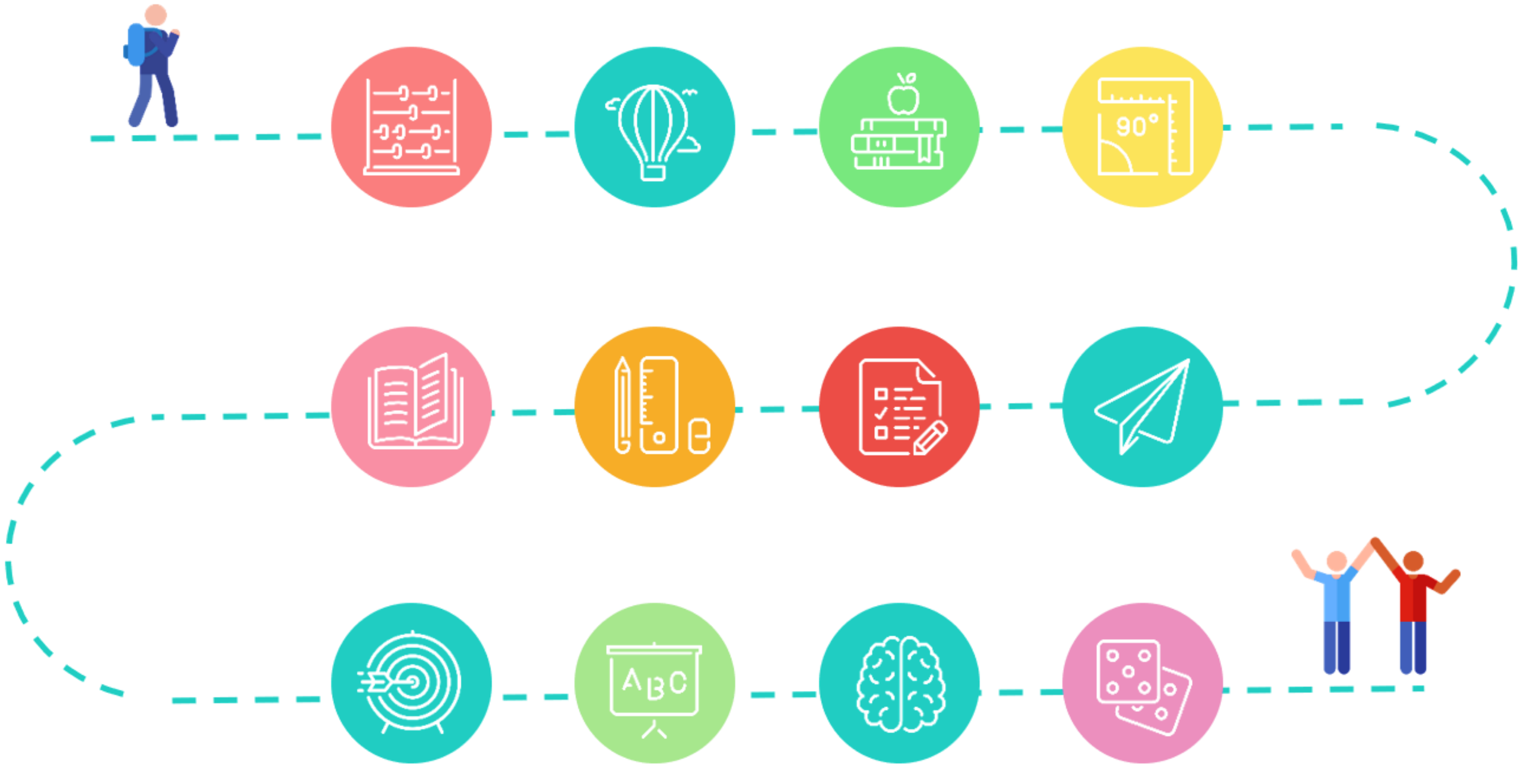
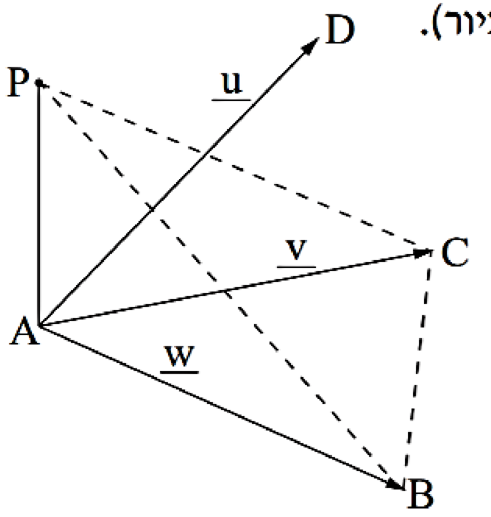
וקטורים



SIMPLEX

שאלה 2



נתונים הווקטורים: $\overrightarrow{AD} = \underline{u}$, $\overrightarrow{AC} = \underline{v}$, $\overrightarrow{AB} = \underline{w}$ (ראה ציור).

נתון: $\sphericalangle BAC = \sphericalangle DAC = 60^o$, $\sphericalangle DAB = 90^o$,

$|\underline{u}| = |\underline{v}| = |\underline{w}| = 2$.

א. האם ייתכן ששלושת הווקטורים $\underline{w}$, $\underline{v}$, $\underline{u}$

נמצאים במישור אחד? נמק.

נתון גם כי הווקטור $\overrightarrow{AP} = a\underline{u} + b\underline{v} + \underline{w}$

מאונך למישור ABC , a ו־ b הם פרמטרים (ראה ציור).

ב. מצא את האורך של $\overrightarrow{AP}$ (ערך מספרי).

ג. היעזר בחישובים טריגונומטריים ומצא את הזווית

בין המישור PCB ובין המישור ABC .

תשובה לשאלה 2

א. לפי הנתון: $\sphericalangle DAB = 90^o$

אם שלושת הווקטורים במישור אחד

אז צריך להתקיים: $\sphericalangle DAB = \sphericalangle BAC + \sphericalangle DAC = 120^o$ (או: $60^o = \sphericalangle BAC = \sphericalangle DAB + \sphericalangle DAC$)

מכאן: שלושת הווקטורים לא במישור אחד

SIMPLEX

ב. $\overrightarrow{AP}$ מאונך למישור ABC, לכן מאונך לכל ווקטור במישור, ומתקיים:

$$\overrightarrow{AP} \cdot \underline{w} = 0 \quad\quad \overrightarrow{AP} \cdot \underline{v} = 0$$

$$\Downarrow \quad\quad \Downarrow$$

$$b|\underline{v}| \cdot |\underline{w}| \cdot \frac{1}{2} + |\underline{w}|^2 = 0 \quad\quad a|\underline{u}| \cdot |\underline{v}| \cdot \frac{1}{2} + b|\underline{v}|^2 + |\underline{w}| \cdot |\underline{v}| \cdot \frac{1}{2} = 0$$

$$\Downarrow \quad\quad \Downarrow$$

$$2b + 4 = 0 \quad\quad 2a + 4b + 2 = 0$$

$$\Downarrow$$

$$a = 3 \quad , \quad b = -2$$

אורך $\overrightarrow{AP}$ מקיים:

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = (3\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w}) \cdot (3\underline{u} - 2\underline{v} + \underline{w})$$

$$\Downarrow$$

$$|\overrightarrow{AP}|^2 = 24$$

$$\Downarrow$$

אורך $\overrightarrow{AP}$ הוא:

$$|\overrightarrow{AP}| = 2\sqrt{6}$$

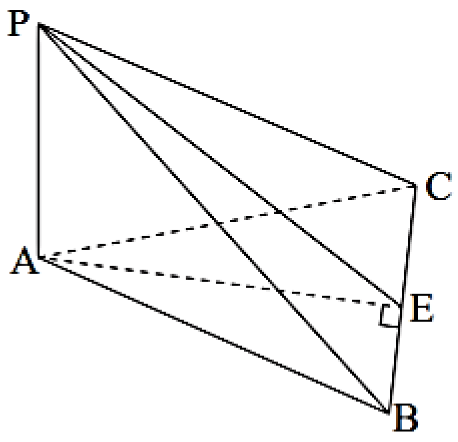
ג. הזווית בין המישור PCB ובין המישור ABC

היא זווית בין שני ישרים במישורים אלה המאונכים לישר החיתוך.

ΔPCB הוא שווה־שוקיים, $PB = PC$ (נובע מהנתונים).

ΔABC הוא שווה־צלעות (על פי הנתון).

לכן אם E אמצע CB אזי $\sphericalangle PEA$ היא הזווית המבוקשת.



במשולש ישר־הזווית PEA מתקיים: $\text{tg} \sphericalangle PEA = \frac{PA}{AE}$

במשולש ישר־הזווית AEB מתקיים: $AE = AB \sin 60^{\circ} = 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \sqrt{3}$

מהצבת $PA = 2\sqrt{6}$ ו־ $AE = \sqrt{3}$

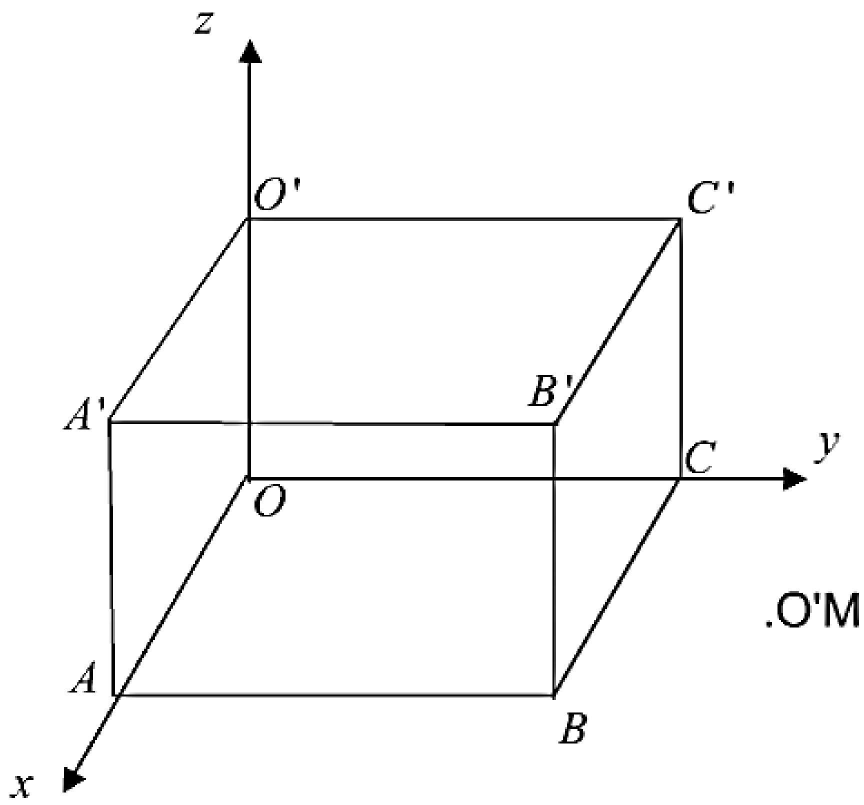
ב־ $\text{tg} \sphericalangle PEA$ נקבל: $\text{tg} \sphericalangle PEA = \frac{2\sqrt{6}}{\sqrt{3}}$

$$\Downarrow$$

$$\sphericalangle PEA = 70.53^{\circ}$$

SIMPLEX

שאלה 2 מתוך קיץ 2015 מועד ב' (בגרות במתמטיקה 5 יחידות)



המקצועות OA, OC ו- 'OO של התיבה 'OABCO'A'B'C
מונחים על הצירים כמתואר בציור.
נתון כי המישור $2x+y+2z-2m=0$
עובר דרך הקודקודים A, C ו- 'O.
m הוא פרמטר גדול מ-0.

א. האם הישר 'BC מקביל למישור הנתון
או חותך אותו? נמק.

ב. הישר O'M נמצא במישור הנתון,
ואינו מתלכד עם הישר O'A.
(1) האם הישרים 'BC ו- O'M מקבילים? נמק.
(2) הבע באמצעות m את המרחק בין הישרים 'BC ו- O'M.

ג. דרך הקודקודים 'C ו- B העבירו אנכים למישור 'ACO.
האנכים חותכים את המישור בנקודות E ו- F.
אורך הקטע EF הוא $2\sqrt{2}$.
מצא את הערך של m.

נתון כי OABCO'A'B'C' תיבה, כלומר:

$AO' \parallel BC'$ (אלכסונים בפאות מקבילות)

המישור $2x+y+2z-2m=0$ מכיל את הישר AO' ,
ומכיוון ש- $AO' \parallel BC'$ אז BC' מקביל לכל למישור $AO'C$: $2x+y+2z-2m=0$

תשובה סופית סעיף א'

סעיף ב'(1)

נתון כי הישר O'M נמצא במישור הנתון, ואינו מתלכד עם הישר O'A. כלומר:

שני הישרים יוצאים מאותה נקודה – נקודה O', ולכן אינם מקבילים זה לזה, כלומר מצטלבים.

תשובה סופית סעיף ב'(1)

סעיף ב'(2)

נמצא את נקודה C (על ידי הצבה במישור $2x+y+2z-2m=0$):

$$x=0, z=0: \quad 2\cdot 0+y_C+2\cdot 0-2m=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{y_C=2m}$$

נמצא את נקודה A (על ידי הצבה במישור $2x+y+2z-2m=0$):

$$y=0, z=0: \quad 2x_A+0+2\cdot 0-2m=0 \quad \rightarrow \quad \boxed{x_A=m}$$

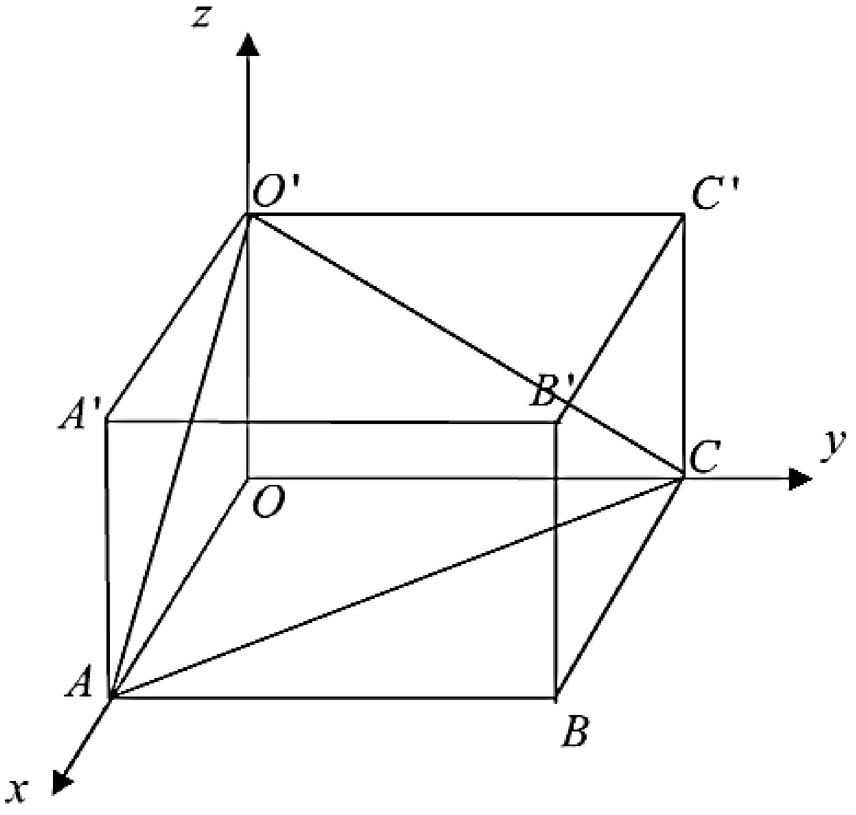
נתון כי OABCO'A'B'C' תיבה,
ולכן נקודה B היא:

$$\boxed{B(m,2m,0)}$$

מצאנו כי BC' מקביל למישור AO'C כאשר O'M מוכל בו.
נמצא את המרחק בין נקודה B למישור $2x+y+2z-2m=0$

$$d=\frac{|2m+2m+0-2m|}{\sqrt{4+1+4}}=\frac{|2m|}{3}=\boxed{\frac{2m}{3}}$$

SIMPLEX



נתון: דרך הקודקודים 'C ו- B העבירו אנכים למישור 'ACO
הוכחנו כי BC' מקביל למישור $AO'C$
דרך הקודקודים 'C ו- B העבירו אנכים למישור $AO'C$,
כלומר נוצר מרובע $BC'EF$, שהוא מלבן. (מרובע שבו יש שני זוגות של ישרים מקבילים, וזווית ישרה בין הצלעות הנגדיות הוא מלבן)

כלומר: $EF = BC' = 2\sqrt{2}$ (במלבן צלעות נגדיות שוות)

נמצא את שיעורי הנקודה B

מצאנו $\boxed{B(m,2m,0)}$

נמצא את שיעורי הנקודה 'C

$x_{C'} = 0$

$y_{C'} = y_C = 2m$

$z_{C'} = z_O \quad \rightarrow \quad x_O = y_O = 0: \quad 2\underbrace{x_O}_{0} + \underbrace{y_O}_{0} + 2z_O - 2m = 0 \quad \rightarrow \quad z_{C'} = z_O = m$

$\rightarrow \quad \boxed{C'(0,2m,m)}$

מצד אחד - נמצא את אורך הוקטור $\overrightarrow{C'B}$
נמצא תחילה את ההצגה האלגברית של הוקטור:

$$\overrightarrow{C'B}=\overrightarrow{B}-\overrightarrow{C'}=(m,2m,0)-(0,2m,m)=(m-0,2m-2m,0-m)=\boxed{(m,0,-m)}$$

נמצא את אורך הוקטור:

$$\left|\overrightarrow{C'B}\right|=\sqrt{m^2+0^2+(-m)^2}=\sqrt{m^2+m^2}=\sqrt{2m^2}$$

מצד שני נתון:

$$EF=BC'=2\sqrt{2}$$

נשווה בין שני הערכים ונמצא את ערכו של m:

$$\sqrt{2m^2}=2\sqrt{2}\xrightarrow{(\ )^2}2m^2=4\cdot 2\rightarrow 2m^2=8\xrightarrow{:2}m^2=4\xrightarrow{\sqrt{}}m=\pm 2\xrightarrow{m>2}\boxed{m=2}$$

SIMPLEX