

# הסתברות



## סוגי שאלות

- טבלה דו-מימדית
- כפל וחיבור הסתברויות – דיאגרמת עץ
- נוסחת ברנולי
- בעיות משולבות

## דף נוסחאות

### הסתברות:

נוסחת ברנולי – ההסתברות ל- $k$  הצלחות מתוך  $n$  ניסיונות בהתפלגות בינומית כאשר ההסתברות

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} \quad \text{כאשר} \quad P_n(k) = \binom{n}{k} p^k \cdot (1-p)^{n-k} \quad \text{להצלחה היא } p$$

$$; \quad P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} \quad \text{הסתברות מותנית}$$

מתמטיקה, תשע"ג, מועד ב, מס' 035806, 316 + נספח

3. מבין כל תלמידי י"ב בעיר מסוימת מאתרים תלמידים שיתאימו לקורס ייחודי. הקורס מתאים לתלמידים שיש להם יכולת טכנית. הבוחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית, ומאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית. מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו.
- א. מהי ההסתברות שלתלמיד י"ב בעיר זו אכן יש יכולת טכנית?
- ב. באותה עיר כל אלה שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, ורק הם. בעיר יש 600 תלמידי י"ב. מבין המשתתפים בקורס לכמה תלמידים אין יכולת טכנית?

$B$ 
 $A$

נתון כי: " הבוחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית", כלומר:

$$\underbrace{P(B/A)}_{0.8} = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = 0.8 \rightarrow \boxed{P(A \cap B) = 0.8 \cdot P(A)}$$

$B$ 
 $\bar{A}$

נתון כי: " מאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית", כלומר:

$$\underbrace{P(B/\bar{A})}_{0.1} = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} \rightarrow \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(\bar{A})} = 0.1 \rightarrow P(\bar{A} \cap B) = 0.1 \cdot \overbrace{P(\bar{A})}^{1-P(A)}$$

$$\rightarrow \boxed{P(\bar{A} \cap B) = 0.1 \cdot [1 - P(A)]}$$

נתון כי: "מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו", כלומר:

$$P(A/B) = 4 \cdot P(\bar{A}/B) \rightarrow \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = 4 \cdot \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} \xrightarrow{\cdot P(B)} \boxed{P(A \cap B) = 4 \cdot P(\bar{A} \cap B)}$$

נציב את  $P(A \cap B) = 0.8 \cdot P(A)$  ואת  $P(\bar{A} \cap B) = 0.1 \cdot [1 - P(A)]$  ב-  $P(A \cap B) = 4 \cdot P(\bar{A} \cap B)$ :

$$0.8 \cdot P(A) = 4 \cdot 0.1 \cdot [1 - P(A)] \rightarrow 0.8 \cdot P(A) = 0.4 \cdot [1 - P(A)] \rightarrow 0.8 \cdot P(A) = 0.4 - 0.4P(A)$$

$$\rightarrow 1.2 \cdot P(A) = 0.4 \rightarrow \boxed{P(A) = \frac{1}{3}}$$

תשובה סופית סעיף א'

	חסרי יכולת טכנית ( $\bar{A}$ )	בעלי יכולת טכנית ( $A$ )	
$\frac{1}{3}$	$\frac{1}{15}$	$\frac{1}{3} - \frac{1}{15} = \frac{4}{15}$	אובחנו כבעלי יכולת טכנית ( $B$ )
$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$			לא אובחנו כבעלי יכולת טכנית ( $\bar{B}$ )
$\boxed{1}$	$1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3}$	$\frac{1}{3}$	

**SIMPLEX**

מתמטיקה, תשע"ג, מועד ב, מס' 035806, 316 + נספח

3. מבין כל תלמידי י"ב בעיר מסוימת מאתרים תלמידים שיתאימו לקורס ייחודי. הקורס מתאים לתלמידים שיש להם יכולת טכנית. הבוחנות מאבחנות 80% מבין התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית, ומאבחנות 10% מבין התלמידים שאין להם יכולת טכנית כבעלי יכולת טכנית. מבין התלמידים שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, אחוז התלמידים שאכן יש להם יכולת טכנית גדול פי 4 מאחוז התלמידים (בקבוצה זו) שאין להם יכולת זו.
- א. מהי ההסתברות שלתלמיד י"ב בעיר זו אכן יש יכולת טכנית?
- ב. באותה עיר כל אלה שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, ורק הם. בעיר יש 600 תלמידי י"ב. מבין המשתתפים בקורס לכמה תלמידים אין יכולת טכנית?



מבקשים בשאלה למצוא: "מבין המשתתפים בקורס" ל כמה תלמידים אין יכולת טכנית"

נתון כי המשתתפים היחידים בקורס היה אלו שאובחנו כבעלי יכולת טכנית, כלומר  $P(B)$ . ולכן:

$$P(\bar{A} / B) = \frac{P(\bar{A} \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{15}}{\frac{1}{3}} = \boxed{\frac{1}{5}}$$

$$\left( P(\bar{A} \cap B) = 0.1 \cdot [1 - P(A)] = 0.1 \cdot \left[1 - \frac{1}{3}\right] = 0.1 \cdot \frac{2}{3} = \boxed{\frac{1}{15}} \right)$$

נתון כי רק אלו שאובחנו כבעלי יכולת טכנית השתתפו בקורס, וכי בעיר ישנם 600 תלמידים, כלומר:

$$600 \cdot \frac{1}{3} = 200$$

200 תלמידים השתתפו בקורס.

מצאנו כי ל-  $\frac{1}{5}$  מהתלמידים שהשתתפו בקורס אין יכולת טכנית, כלומר:

$$200 \cdot \frac{1}{5} = \boxed{40}$$

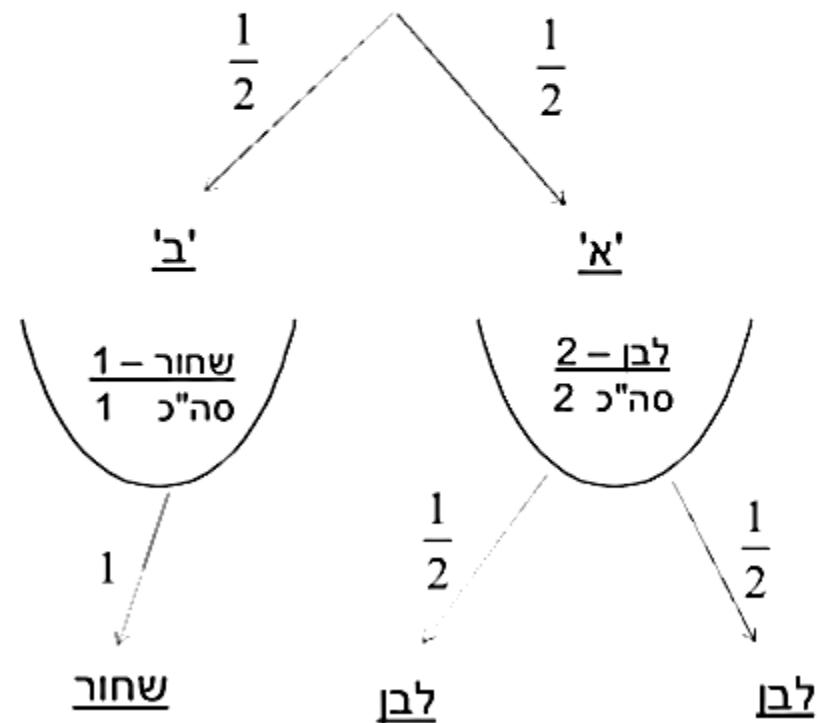
ל-  $\boxed{40}$  תלמידים אין יכולת טכנית.

תשובה סופית סעיף ב'

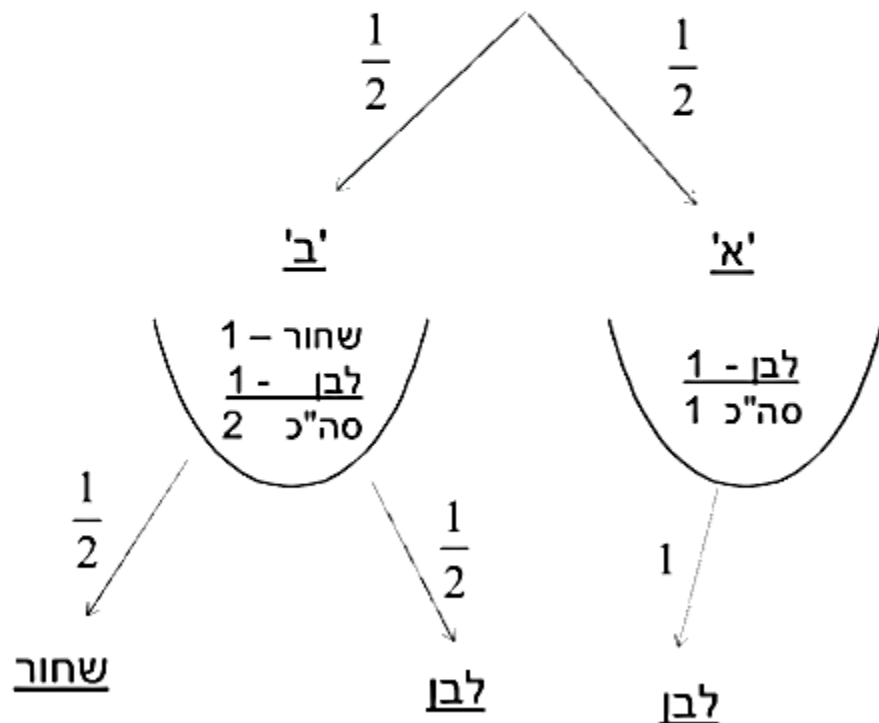
3. א. מחלקים 2 כדורים לבנים וכדור 1 שחור בין שני כדים. בכל כד חייב להיות לפחות כדור אחד. בוחרים באקראי כד ומוציאים ממנו כדור אחד. מצא באיזה אופן צריך לחלק את הכדורים בין שני הכדים, כדי שהסיכוי להוציא כדור לבן יהיה הגדול ביותר.
- ב. בכד אחד יש 5 כדורים: 2 לבנים ו- 3 שחורים.
- (1) מוציאים באקראי 5 פעמים כדור מהכד עם החזרה (בכל פעם מחזירים לכד את הכדור שהוצא).
- מהי ההסתברות להוציא בדיוק פעמיים כדור לבן?
- (2) מוציאים באקראי 6 פעמים כדור מהכד עם החזרה.
- מהי ההסתברות להוציא בדיוק 3 פעמים כדור לבן כך שהכדור הלבן השלישי יוצא בפעם השישית?
- הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

נרשום את שתי האפשרויות לחלוקת הכדורים,  
ונראה באיזה מהן יש סיכוי גדול יותר להוצאת כדור לבן:

### אפשרות א'



### אפשרות ב'



**SIMPLEX**

נחשב את ההסתברות להוציא כדור לבן בכל אחת מן האפשרויות:

$$P\left(\frac{\text{כדור לבן}}{\text{באפשרות א'}}\right) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{"כד א' לבן'}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{"כד א' לבן'}} = \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{1}{2}}$$

$$P\left(\frac{\text{כדור לבן}}{\text{באפשרות ב'}}\right) = \underbrace{\frac{1}{2} \cdot 1}_{\text{"כד א' לבן'}} + \underbrace{\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}}_{\text{"כד ב' לבן'}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} = \boxed{\frac{3}{4}}$$

מסקנה:

על מנת שההסתברות להוציא כדור לבן תהיה הגבוהה ביותר, צריך לשים בכד א' כדור לבן, ובכד ב' כדור לבן וכדור שחור.

תשובה סופית סעיף א'

## סעיף ב'(1)

	לבן	שחור
הוצאה 1	$\frac{2}{5} = 0.4$	$\frac{3}{5} = 0.6$
הוצאה 2	0.4	0.6
הוצאה 3	0.4	0.6
הוצאה 4	0.4	0.6
הוצאה 5	0.4	0.6

זיהוי: ברנולי

מדוע ברנולי?

- ✓ סדרה של ניסויים בלתי תלויים
- ✓ בכל ניסוי 2 תוצאות אפשריות הצלחה או כישלון
- ✓ ההסתברות להצלחה זהה בכל הניסויים

$$P\left(\begin{array}{c} \text{בדיוק} \\ \text{פעמיים לבן} \end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c} \text{פעמיים} \\ \text{לבן} \end{array}\right) = \binom{5}{2} \cdot 0.4^2 \cdot 0.6^3 = \frac{216}{625}$$

תשובה סופית סעיף ב' (1)

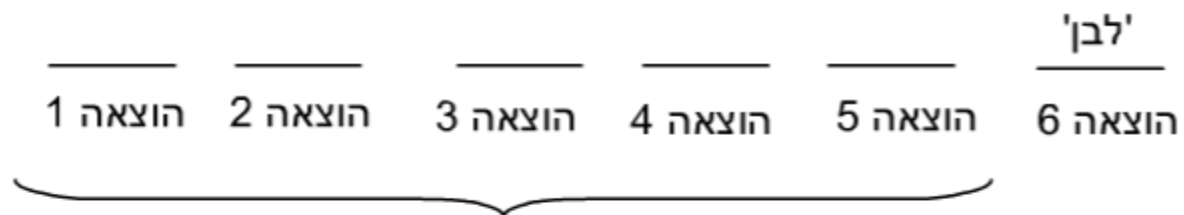
$$\boxed{5} \boxed{nCr} \boxed{2}$$

$$\left[ \begin{array}{l} P(k) = \binom{n}{k} \cdot P^k \cdot (1-P)^{n-k} \\ n = \boxed{5} \\ k = \boxed{2} \\ \text{'לבן'} \quad P = \boxed{0.4} \end{array} \right]$$

**SIMPLEX**

## סעיף ב'(2)

נתון כי בהוצאה האחרונה יצא כדור לבן, ונתון שסה"כ יצאו 3 כדורים לבנים.  
נצייר את המבוקש בשאלה:



ב-5 ההוצאות הללו,  
צריכים להיות בדיוק 2 לבנים,  
לא משנה באיזה סדר



$$P\left(\frac{\text{3 כדורים לבנים, שאחד מהם בהוצאה האחרונה}}{\text{בדיוק 2 כדורים לבנים, ב5 הוצאות}}\right) = P\left(\frac{\text{כדור לבן}}{\text{כדור לבן}}\right) = \frac{216}{625} \cdot \frac{2}{5}$$

חישבנו בסעיף קודם -
וגם'

$$\frac{216}{625}$$

$$\frac{2}{5}$$

$$= \boxed{\frac{432}{3125}}$$

3. בחדר I נמצאים  $k$  נשים ו- $k$  גברים ( $k > 1$ ). בחדר II נמצאים  $k$  נשים ו- $3k$  גברים.

מטילים קובייה מאוזנת.

אם מתקבל מספר המתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר I.

אם מתקבל מספר שאינו מתחלק ב-3, בוחרים בזה אחר זה בלי החזרה, 2 אנשים מחדר II.

כאשר בוחרים באופן זה, ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I גדולה פי  $\frac{15}{7}$  מההסתברות

לבחור 2 נשים מחדר II.

א. מצא את  $k$ .

ב. מצא את ההסתברות לבחור 2 נשים באופן שתואר.

ג. ידוע שנבחר לפחות גבר אחד באופן שתואר.

מהי ההסתברות שנבחרו בדיוק 2 גברים מחדר I?

**SIMPLEX**

ההסתברות לבחור בחדר I היא:  $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$  . ההסתברות לבחור בחדר II היא:  $\frac{4}{6} = \frac{2}{3}$  .

מכאן:

ההסתברות לבחור 2 נשים מחדר I היא:

$$P \left( \begin{array}{c} 2 \text{ נשים} \\ \text{מחדר I} \end{array} \right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{k}{2k} \cdot \frac{k-1}{2k-1}$$

וההסתברות לבחור 2 נשים מחדר II היא:

$$P \left( \begin{array}{c} 2 \text{ נשים} \\ \text{מחדר II} \end{array} \right) = \frac{2}{3} \cdot \frac{k}{4k} \cdot \frac{k-1}{4k-1}$$

לפי הנתון:

$$P \left( \begin{array}{c} 2 \text{ נשים} \\ \text{מחדר I} \end{array} \right) = \frac{15}{7} P \left( \begin{array}{c} 2 \text{ נשים} \\ \text{מחדר II} \end{array} \right)$$

⇓

$$k = 4$$

מפתרון המשוואה, אחרי צמצום ב-  $k - 1$ , מקבלים:

**SIMPLEX**

$$P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ גברים} \\ \text{I מחדר} \end{array} / \begin{array}{l} \text{לפחות} \\ 1 \text{ גבר} \end{array}\right) = \frac{P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ גברים} \\ \text{I מחדר} \end{array}\right)}{P\left(\begin{array}{l} \text{לפחות} \\ 1 \text{ גבר} \end{array}\right)}$$

$$P\left(\begin{array}{l} \text{לפחות} \\ 1 \text{ גבר} \end{array}\right) = 1 - P(2 \text{ נשים}) = 1 - \frac{11}{105}$$

$$P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ גברים} \\ \text{I מחדר} \end{array}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$$

$$P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ גברים} \\ \text{I מחדר} \end{array} / \begin{array}{l} \text{לפחות} \\ 1 \text{ גבר} \end{array}\right) = \frac{15}{188}$$

$$P(2 \text{ נשים}) = P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ נשים} \\ \text{I מחדר} \end{array}\right) + P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ נשים} \\ \text{II מחדר} \end{array}\right)$$

$$P(2 \text{ נשים}) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} \cdot \frac{3}{15} = \frac{11}{105}$$

$$P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ גברים} \\ \text{I מחדר} \end{array} / \begin{array}{l} \text{לפחות} \\ 1 \text{ גבר} \end{array}\right) = \frac{P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ גברים} \\ \text{I מחדר} \end{array}\right)}{P\left(\begin{array}{l} \text{לפחות} \\ 1 \text{ גבר} \end{array}\right)}$$

$$P\left(\begin{array}{l} \text{לפחות} \\ 1 \text{ גבר} \end{array}\right) = 1 - P(2 \text{ נשים}) = 1 - \frac{11}{105}$$

$$P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ גברים} \\ \text{I מחדר} \end{array}\right) = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{7}$$

$$P\left(\begin{array}{l} 2 \text{ גברים} \\ \text{I מחדר} \end{array} / \begin{array}{l} \text{לפחות} \\ 1 \text{ גבר} \end{array}\right) = \frac{15}{188}$$

**SIMPLEX**

**ש"ב:**  
**לסיים בחוברת בגרזיות**  
**"שאלון 581 (806)"**

**את כל השאלות בנושא הסתברות**  
**בעמודים 27-36**

**SIMPLEX**