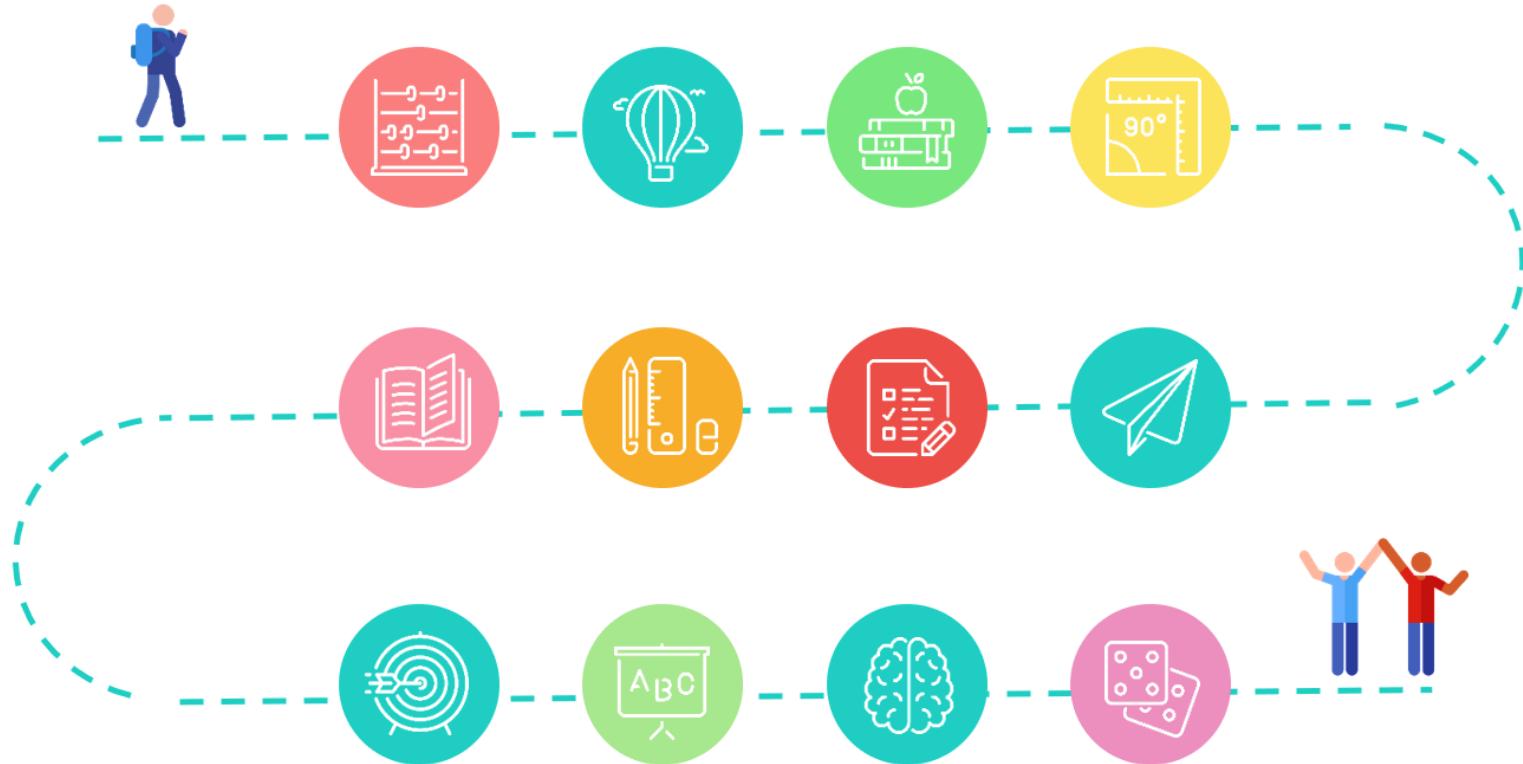


גיאומטריה אנליטית



ישר:

. $Ax + By + C = 0$ - הצגה כללית (אין סוף הצגות) , $y = m x + n$ - שיפוע

$$m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$$

שיפוע הישר העובר דרך הנקודות $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$:

מרחק בין שתי נקודות $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$:

הישרים $n + m_1 x = y$ ו- $n + m_2 x = y$ מאונכים זה לזה אם ורק אם :

מרחק הנקודה (x_1, y_1) מהישר $Ax + By + C = 0$:

נקודה אמצע של קטע שקצוטיו $(x_2, y_2), (x_1, y_1)$:

שיעור הנקודה P המחלקת את הקטע בין A(x₁,y₁) ל- B(x₂,y₂) ביחס k:l

מעגל: המיקום הגיאומטרי של כל הנקודות שמרחקן מנקודה קבועה (המרכז) שווה לקטע קבוע (הרדיוס) נקרא **מעגל**.

$$(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$$

משוואת מעגל שמרכזו (a, b) ורדיוסו r :

משוואת המשיק למעגל (x_0, y_0) בנקודה $(x - a)^2 + (y - b)^2 = r^2$:

$$(x_0 - a) \cdot (x - a) + (y_0 - b) \cdot (y - b) = r^2$$

פרבולה: המיקום הגיאומטרי של כל הנקודות שנמצאות במרחק שווה מנקודה קבועה ומישר קבוע נקרא **פרבולה**.

$$y^2 = 2px$$

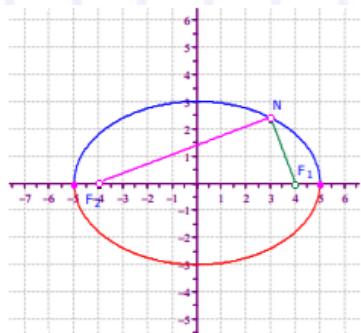
משוואת פרבולה שמקצתה ב- $(0, \frac{p}{2})$ והמדיריך שלה הוא $x = -\frac{p}{2}$ היא :

$$yy_0 = p(x + x_0)$$

משיק לפרבולה בנק' (x_0, y_0)

$$n = \frac{p}{2m}$$

(*) התנאי שהישר $n = mx + y$ ישייך לפרבולה



אליפסה: המיקום הגיאומטרי של כל הנקודות סכום מרחוקיהן משתי נקודות קבועות (מקדים) - שווה לגודל קבוע נקרא אליפסה.

(*) **משוואה אליפסה קנוונית:** $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$: [a,-a נקי חיתוך עם ציר ה-x. b,-b נקי חיתוך עם ציר ה-y]

(*) **הקשר בין המוקד (מסומן ב-c או ב-f) ל-a ולב:**

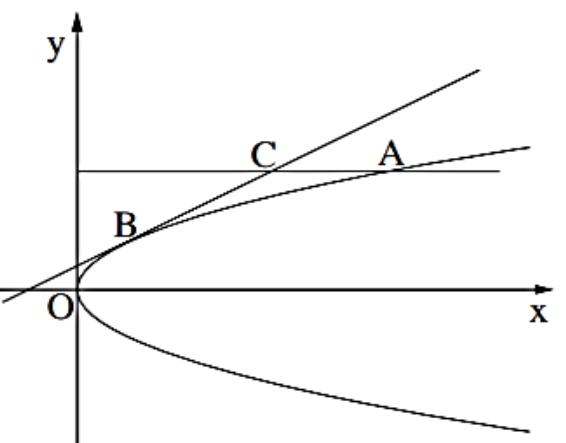
$c = \sqrt{a^2 - b^2}$ (*) **מרחק המוקד מהראשית:**

(*) **תנאי לקיום אליפסה:** $a > c \iff 2a > 2c \iff r_1 + r_2 > 2c$ (*) **משיק לאליפסה בנק' (x₀,y₀) שעל האליפסה:**

(*) **אורך הרדיוסים (בעצם מרחק נקודה שעלה אליפסה (x,y) מהמקדים):**

$$r_1 = a - \underbrace{\frac{cx}{a}}_{\text{מיהימני}} \quad r_2 = a + \underbrace{\frac{cx}{a}}_{\text{מהשמאלי}}$$

שאלה 1



נקודה A נמצאת בربיע הראשון.

על הפרבולה המשוואת $y^2 = 3x$.

ישר המשיק לפרבולה בנקודה B

מקביל למיתר OA (O – ראשית הצירים).

דרך הנקודה A העבירו ישר המקביל לציר ה- x.

הישר חותך את המשיק בנקודה C (ראה ציור).

נסמן: x_C – שיעור ה- x של הנקודה C.

x_A – שיעור ה- x של הנקודה A.

היעזר בעובדה שהנקודה C נמצאת על פרבולה המשוואת $y^2 = 4x$,

וענה על הסעיפים א, ב, ג.

א. הבע באמצעות x_C את x_A .

ב. הבע באמצעות x_C את השיפוע של הישר OA.

ג. נתון גם כי שטח המשולש BCA הוא 0.5625.

מצא את השיעורים של הנקודה C.

א. CA מקביל לציר ה- x , לכן:

$$y_A = y_C$$

I. $x_A = \frac{y_A^2}{3} = \frac{y_C^2}{3}$

A על הפרבולה $x = 3y^2$, לכן:

II. $y_C^2 = 4x_C$

C על הפרבולה $y = 4x$, לכן:

$$x_A = \frac{4x_C}{3}$$

מ- I ו- II מקבלים:

$$m_{OA} = \frac{y_A}{x_A}$$

ב. השיפוע OA מקיים:



$$m_{OA} = \frac{y_C}{x_A}$$



$$m_{OA} = \frac{3\sqrt{4x_C}}{4x_C} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_C}}$$

$$\text{נzieb } y_C = \sqrt{4x_C} \text{ ו } x_A = \frac{4x_C}{3}$$

(C בריבוע הראשון):

ג. משוואת המשיק לפרבולה $y^2 = 3x$ בנקודה B היא:

\Downarrow

$$m = \frac{3}{2y_B}$$
 שיפוע המשיק בנקודה B הוא:

$m = m_{OA}$ המשיק בנקודה B מקביל למיתר OA, לכן:

\Downarrow

$$\frac{3}{2y_B} = \frac{3}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{x_C}}$$

\Downarrow

$$y_B = \sqrt{x_C}$$

$$0.5625 = \frac{1}{2}(y_C - y_B)(x_A - x_C)$$
 שטח המשולש BCA מקיים:

\Downarrow

$$0.5625 = \frac{1}{2}(\sqrt{4x_C} - \sqrt{x_C})(\frac{4}{3}x_C - x_C)$$

שטח המשולש BCA מקיים:

$$0.5625 = \frac{1}{2}(y_C - y_B)(x_A - x_C)$$

↓

$$0.5625 = \frac{1}{2}(\sqrt{4x_C} - \sqrt{x_C})\left(\frac{4}{3}x_C - x_C\right)$$

↓

$$0.5625 = \frac{x_C^2}{6\sqrt{x_C}} = \frac{1}{6}x_C^{\frac{3}{2}}$$

↓

$$(0.5625 \cdot 6)^{\frac{2}{3}} = x_C$$

↓

$$x_C = 2.25 \quad \Rightarrow \quad C(2.25, 3)$$

$$y_C = \sqrt{4 \cdot 2.25} = 3$$

הנקודות $C(x_1, y_1)$ ו- $D(x_2, y_2)$ נמצאות בربיע הראשון על הפרבולה $y^2 = 4x$.

א. (1) הראה כי שיפוע המיתר CD הוא $m = \frac{4}{y_2 + y_1}$.

(2) הנקודה $(3, x)$ היא אמצע המיתר CD .
מצא את m .

ב. נתון כי מרחק כל נקודה על הפרבולה הנ吐ונה מהישר $a = x$ שווה למרחקה מהנקודה $(1, 0)$.

מרחק הנקודה C מהישר $a = x$ הוא 6.

(1) מהו הערך של a ? נמק.

(2) מצא את משוואת הישר CD .

א. (1) שיפוע הישר CD מקיים:

$$m = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2}$$

$$x_1 = \frac{(y_1)^2}{4} , \quad x_2 = \frac{(y_2)^2}{4}$$

שיעוריה x של הנקודות C ו D מקיימים:

$$m = \frac{4(y_1 - y_2)}{(y_1)^2 - (y_2)^2}$$

מהצבת שיעוריה x של C ו D בשיפוע קיבל:

↓

$$m = \frac{4}{y_1 + y_2}$$

(2) על פי הנתון אמצע קטע CD הוא בנקודה:

$$(x, 3)$$



$$3 = \frac{y_1 + y_2}{2}$$



$$y_1 + y_2 = 6$$



$$m = \frac{2}{3}$$

שיעוריה y של הנקודות C ו D מקיימים:

מהצבת $6 = y_1 + y_2$ בשיפוע CD קיבל:

ב. (1) ההגדרה של פרבולה היא:

המקום הגאומטרי של הנקודות הנמצאות
במרחק שווה מנקודה קבועה ומישר קבוע.



הנקודה $(1, 0)$ היא מוקד הפרבולה הנתונה
והישר $x = a$ הוא מדריך הפרבולה הנתונה.

משוואת המדריך של הפרבולה

הנתונה, $x = 2 \cdot 2x$, היא:

$$x = -\frac{2}{2} = -1$$



$$a = -1$$

(2) מרחק הנקודה C מהישר $x = 2a$



$$6 = |x_1 - 2a| \quad : x = 2a \text{ מכאן } a = 1 \text{ ומצאנו כי } x_1 > 0$$



$$x_1 = 4$$



שיעור ה- y של הנקודה C

$$y_1 = \sqrt{4 \cdot 4} = 4 \quad \text{הנמצאת בربיע הראשון:}$$

מצאנו כי $m = \frac{2}{3}$

$$y - 4 = \frac{2}{3}(x - 4) \quad : \text{_CD}$$



$$y = \frac{2}{3}x + \frac{4}{3}$$